

Sinn und Zweck der linearen Algebra kennenlernen

---

Erfahrungen mit den notwendigen Bestandteilen der linearen Algebra sammeln

---

Sich vom Potenzial der Matrizen und Determinanten überzeugen

---

Lineare Abbildungen und affine Transformationen erfassen

---

Erkenntnisse über Eigenwerte und Eigenvektoren gewinnen bis hin zum Spektralsatz

---

Verstehen, wie alles zusammen hängt

# Kapitel 1

## Die bunte Welt der linearen Algebra

In diesem Kapitel gebe ich Ihnen eine Schnelleinführung in die lineare Algebra. Wenn Sie auf einem Gebiet unsicher sind oder gerne ausführlichere Erklärungen hätten, dann lesen einfach in den Kapiteln nach, die ich Ihnen an den entsprechenden Stellen empfehle.

Leider löst allein das Wort *Algebra* bei den meisten Menschen und selbst bei Studierenden, die sich mehr oder weniger zwingend mit Mathematik befassen müssen, Kopfschmerzen oder Magenkrämpfe aus. Es scheint sich um eine geheimnisvolle, nicht verständliche Gedankenwelt zu handeln, die Uneingeweihte nie und nimmer erschließen können und die einzig zu dem Zweck konzipiert worden ist, Ängste und böse Erinnerungen an die Schulzeit auszulösen.

Wenn dann noch ein kryptisches Adjektiv wie *linear* hinzukommt, schaltet der Verstand automatisch in den Verteidigungsmodus und blockt alles ab, was danach an Erklärungen folgt.

## Algebra

Das Wort »Algebra« müsste aufgrund seiner Herkunft eine geradezu heilsame Wirkung verbreiten. Denn das arabische *al-ğabr* steht für »Einrenken gebrochener Knochen« und wurde vom medizinischen Fachbegriff vor über tausend Jahren geradewegs auf die Mathematik übertragen. Die Algebra meint seither gewissermaßen das Einrenken von mathematischen Termen, etwa in Gleichungen, um eine Lösung für die dort vorhandenen Unbekannten zu ermitteln. Die Anwendung algebraischer Methoden bedeutet also nichts weniger als die Suche nach Lösungen für gegebene Probleme, und das ist in allen Facetten erstrebenswert. Zumal die mathematischen Probleme fast immer aus technischen und naturwissenschaftlichen Anwendungsgebieten hervorgegangen sind.

## Linear

Der Begriff »linear« lässt sich auf das griechische *linea* zurückführen und bedeutet eine gerade Linie, was sich auch im deutschen Wort »Lineal« widerspiegelt. Es ist also ein Hilfsmittel, um eine direkte, schnörkellose Verbindung vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt herzustellen. Dasselbe sollen Sie erreichen auf dem Weg durch das Labyrinth der linearen Algebra, von den einfachsten Grundvoraussetzungen bis zu den kompliziertesten Folgerungen!

Wenn Sie nun endlich in die Welt der linearen Algebra eintauchen, möchte ich Sie einladen, die heilsame und geradlinige Wirkung der Erkenntnisse zu spüren und ihre spannenden Entdeckungen auf sich einwirken zu lassen.

## Dafür braucht man lineare Algebra

Um auszurechnen, wie weit ein Zug entfernt ist, der sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 120 km/h bewegt und in genau 27 Minuten ankommen soll, genügt einfache Schulalgebra, wie sie im Allgemeinen in der Mittelstufe den Schülern vermittelt wird. Ausgehend von der Formel

$$v = \frac{s}{t} \text{ und damit } s = v \cdot t$$

für konstante Geschwindigkeiten können Sie die Unbekannte »s«, die die zurückgelegte Wegstrecke beschreibt, durch die Multiplikation der Geschwindigkeit »v« mit der Zeit »t« erhalten. Beachten Sie dabei, dass die Zeit von 27 Minuten durch Division von 60 in 0,45 Stunden umzurechnen ist, weil ja auch die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde angegeben wurde. Sie erhalten:

$$s = v \cdot t = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,45 \text{ h} = 54 \text{ km}$$

Der Zug ist also exakt 54 km entfernt, vorausgesetzt, er kommt pünktlich an, und wann tut er das schon? Aber das ist ein anderes Thema ...

Die Aufgabe war aus zwei Gründen relativ einfach. Zum einen traten in der Ausgangsformel weder Quadrate, noch Wurzeln, noch trigonometrische oder andere mathematische Funktionen auf. Vielmehr verhielten sich die gesuchte Wegstrecke und die gegebene Zeit zueinander *proportional*, was die Mathematiker *linear* nennen.



Das Adjektiv *linear* im Zusammenhang mit mathematischen Problemstellungen verweist immer auf einfache Beziehungen ohne komplizierte Funktionen, also auf solche Beziehungen, bei denen eine Größe in einem konstanten Verhältnis zu einer anderen steht. Sie können es meistens als Synonym für *einfach* verwenden.

Zum anderen war das Problem *eindimensional*, weil sich der Zug nur auf Schienen bewegen kann und weil nur von einem einzigen Zug die Rede war.

Spannende lineare Algebra kommt immer dann ins Spiel, wenn Sie *viele Unbekannte* oder ein *mehrdimensionales* Umfeld benötigen, das Zusammenspiel der einzelnen Variablen jedoch im Prinzip so einfach, also linear ist, wie Sie das im obigen Beispiel gesehen haben.

## Systeme von Gleichungen lösen

Wenn zwei Billard-Kugeln mit unterschiedlichen aber konstanten Geschwindigkeiten kollidieren, werden beide vom Aufprall abgelenkt. Dabei verändern sich sowohl Tempo als auch die jeweilige Bewegungsrichtung. Dieses Problem ist wie das Eingangsbeispiel linear, weil man idealisierend von Reibungsgrößen absieht. Aber jetzt haben Sie es offenbar mit zwei Dimensionen zu tun. Zur Beschreibung der Geschwindigkeit benötigen Sie daher einen *Vektor*, der zwei Komponenten besitzt, jeweils eine für jede Raumdimension auf dem Billardtisch. Das dahinter liegende physikalische Erhaltungsgesetz bezieht sich auf den *Impuls*, der das Produkt von Masse und Geschwindigkeit angibt. Wenn Sie die Massen der beiden Kugeln mit  $m_1$  und  $m_2$  ansetzen und die jeweiligen Geschwindigkeiten mit  $v_1$  und  $v_2$ , erhalten Sie die lineare Gleichung:

$$m_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) = m_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}'_2)$$

Dabei deutet der Pfeil auf den Variablen an, dass es sich um Vektoren handelt und der Strich meint die jeweilig neuen Geschwindigkeiten der Billardkugeln nach dem Aufprall.

Tatsächlich stecken in dieser einfachen, linearen Vektorgleichung zwei lineare Gleichungen, weil sich die Billardkugeln auf einer zweidimensionalen Ebene bewegen. Diese beiden Gleichungen hängen aber zusammen; sie werden daher als ein *Gleichungssystem* bezeichnet.



Ein *Gleichungssystem* besteht aus zwei oder mehr Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Jede Lösung des Gleichungssystems muss zugleich Lösung einer jeden einzelnen Gleichung sein.

Lineare Algebra versetzt Sie in die Lage, mit ausgefeilten technischen Verfahren dieses und viele andere Probleme auf elegante Weise zu lösen. Und das ist nur der Anfang. Die Anzahl

der Dimensionen spielt nämlich überhaupt keine Rolle. Solange die Grundgleichungen alle linear sind, lassen sie sich mit denselben Methoden bearbeiten. Sie können die Verfahren der linearen Algebra für beliebig viele Dimensionen einsetzen!

Wenn Ihnen jetzt der Kopf raucht, kann ich Sie beruhigen. Denn das allerbeste dabei ist, dass Sie sich keineswegs die vielen Dimensionen räumlich vorstellen müssen. Um die räumliche Komplexität zu erfassen, genügt jedenfalls fast immer die Vorstellung von drei Dimensionen.

## Geometrische Rätsel knacken

Seit der Antike ist die *Geometrie* ein sehr fruchtbarer Zweig der Mathematik, dessen Erkenntnisse auch auf die anderen Teilgebiete abstrahlen. Denken Sie allein an die Betrachtung von rechtwinkligen Dreiecken. Der berühmte »Satz des Pythagoras« ist dabei nur die Spitze des Eisberges. Weitere Klassiker sind etwa der »Höhensatz« oder der »Kathetensatz des Euklid«.

Praktischerweise hat auch die lineare Algebra einen klaren geometrischen Bezug. Stellen Sie sich zwei Geraden im dreidimensionalen Raum vor. Hier gibt es einige Möglichkeiten, wie sich diese zueinander verhalten.

Zwei Geraden können ...

- ✓ sich in einem Punkt schneiden. Wunderbar! Treffer, versenkt!
- ✓ komplett zusammenfallen, so dass Sie denken, es handele sich nur um eine einzige Gerade.
- ✓ parallel zueinander liegen. Dann kann man lange auf einen Schnittpunkt warten. Unendlich lange, gewissermaßen.
- ✓ auch *windschief* zueinander sein. Dieses Adjektiv wird nicht nur auf unsachgemäß zusammengebastelte Möbelstücke angewendet, sondern meint in der Mathematik eben die Lage zweier sich nicht schneidender aber auch nicht paralleler Geraden.



Im zweidimensionalen Raum können Geraden nicht zueinander windschief sein!

Aus der Schulmathematik erinnern Sie sich vielleicht an die *allgemeine Geradengleichung*, sie lautet:

$$y = m \cdot x + b$$

Dabei sind  $x$  und  $y$  variabel, während  $m$  die Steigung und  $b$  der  $Y$ -Achsenabschnitt der zugehörigen Geraden darstellt.

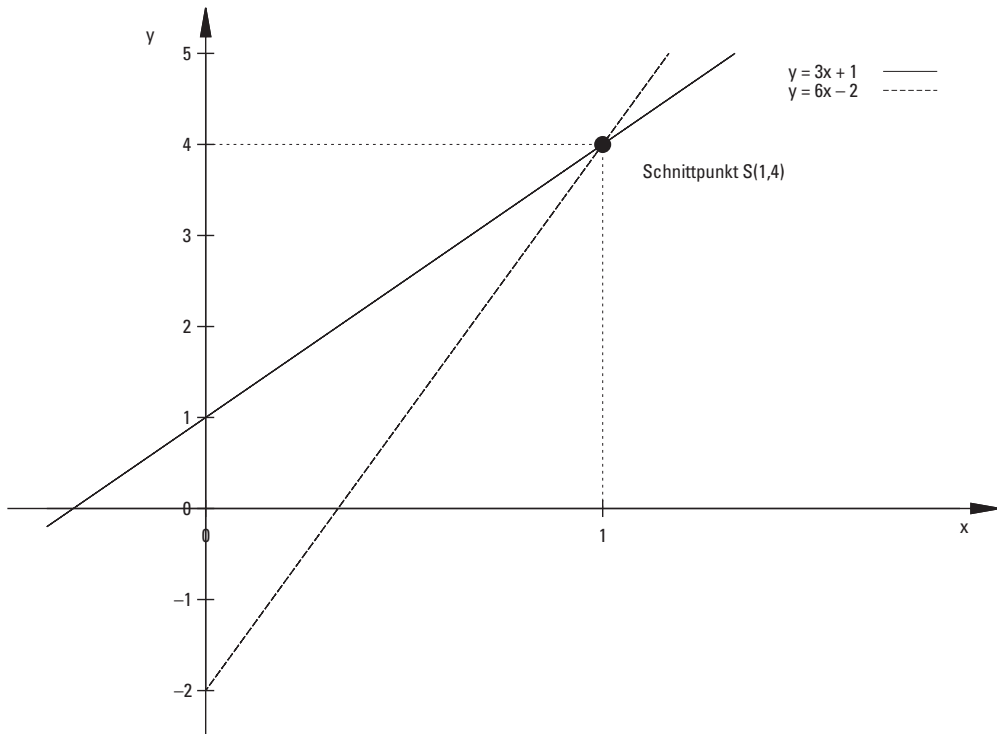
Vielleicht springt es Ihnen jetzt ins Auge: die Geradengleichung ist linear! Wenn Sie nun zwei konkrete Geraden benötigen, setzen Sie einfach für  $m$  und  $b$  die entsprechenden Werte ein. Zum Beispiel:

$$y = 3x + 1$$

$$y = 6x - 2$$

Und schon haben Sie ein System von linearen Gleichungen, kurz ein *lineares Gleichungssystem*. Die beiden Geraden schneiden sich übrigens im Punkt  $S(1,4)$ , was Sie durch Einsetzen von  $x = 1$  und  $y = 4$  in beide Gleichungen überprüfen können.

Geometrisch entnehmen Sie diese Lösung unmittelbar Abbildung 1.1.



**Abbildung 1.1:** Schnittpunkt zweier Geraden

Das geht mittels linearer Algebra jedoch eleganter und genauer. Schauen Sie sich dazu ein weiteres, etwas größeres lineares Gleichungssystem an:

$$3x - 2y + 4z = 5$$

$$-x + 3y + 2z = 5$$

$$2x - 7y + 3z = 4$$

Durch eine Lösungsmethode Ihrer Wahl finden Sie den gesuchten Schnittpunkt  $S(-1, 0, 2)$ .



Im 6. Kapitel werden alle wichtigen Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme systematisch und ohne großes Brimborium erklärt!

Natürlich können Sie dieses Problem alternativ auch rein geometrisch lösen. Jede Zeile entspricht einer Ebene im dreidimensionalen Raum. Drei Zeilen ergeben drei Ebenen und diese schneiden sich im Beispiel – zufällig – genau in einem Punkt!

Wenn ich Sie immer noch nicht vom Nutzen der linearen Algebra überzeugt habe, lassen Sie uns doch ein Gleichungssystem mit zehn Unbekannten und zehn Gleichungen angehen. Ich versichere Ihnen, dass kein Mensch auf dieser Erde eine derartige Aufgabenstellung durch räumliche Vorstellung lösen kann! Dennoch kann auch hier wiederum ein einziger Punkt herauskommen, und die Methodik zur Lösungsfindung unterscheidet sich überhaupt nicht vom dreidimensionalen Fall.

## Die Bausteine der linearen Algebra erkennen

Scheinbar besitzt die lineare Algebra keine erschreckenden oder beunruhigenden Aspekte. Gut, alles oberhalb von drei Dimensionen ist, um es gelinde auszudrücken, recht ungewohnt, aber ansonsten ist doch alles einfach und klar, eben linear.

Das ist richtig! Aber damit Sie das Potenzial der linearen Algebra voll ausschöpfen, genügen die Betrachtungen von geometrischen Aspekten nicht mehr. Vielmehr müssen Sie sich die Frage gefallen lassen, ob die Konzepte der linearen Algebra nicht so verallgemeinert werden können, dass sie sich auf alle möglichen anderen Bereiche ausdehnen lassen.

## Körper und Vektorräume

Jener Gedanke führt uns geradewegs in einen neuen, hellen Raum und einen Schritt weiter in das noch unbekannte Labyrinth. Dieser Ort mit seinen klaren Strukturen und unentdeckten Möglichkeiten heißt *Vektorraum*. Jeder Vektorraum benötigt zudem eine – zumindest vom Namen her – sehr merkwürdige Struktur, nämlich einen *Körper*.



Der *Vektorraum* ist die wichtigste Struktur der linearen Algebra. Fast alle Erkenntnisse und mathematischen Gesetze basieren auf Vektorräumen. Kapitel 5 befasst sich exklusiv mit diesen sagenhaften Räumen und verspricht eine atemberaubende Aussicht!

## Sinnvolle Verknüpfungen von Vektoren

Im Gegensatz zu einer einfachen Zahl besteht ein *Vektor* aus vielen Zahlen, die auch *Komponenten* heißen. Beispielsweise besteht der Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  nur aus zwei Komponenten, während

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$  über vier verfügt! Der *Vektorraum* bezeichnet den Ort, den die Vektoren bewohnen.

Innerhalb des Vektorraums sind Verknüpfungen zwischen den Vektoren definiert, zum Beispiel die *Addition*. Jede einzelne Komponente eines Vektors ist dabei ein *Skalar*, eine einfache Zahl. Die Anzahl der Komponenten bestimmt die *Dimension* des Vektorraums.



Gewöhnen Sie sich schnell, am besten sofort, an die in der Mathematik übliche Verklammerung von einfachsten Zusammenhängen, damit Sie sogleich zum elitären Club derjenigen gehören, die wissen, was hinter gefährlich klingenden Ausdrücken wie »Skalar« steckt: nämlich eine ganz gewöhnliche *Zahl*. Im Ernst: Ob es Ihnen gefällt oder nicht, diese Fachsprache wird von vielen Autoren und Dozenten genutzt und deshalb müssen Sie diese verstehen, damit Sie den Ausführungen folgen können.

Diese Zahl kann beispielsweise eine reelle Zahl sein, eine komplexe oder eine rationale. Auf jeden Fall muss sie einem Zahlkörper, oder kurz einem *Körper*, angehören. Ein Körper definiert die mathematischen Verknüpfungen zwischen Skalaren. Sie benötigen für jeden möglichen Vektorraum, und davon gibt es sehr viele, immer einen Körper. Ein Vektorraum schwirrt wie ein Satellit um den Himmels-»Körper«. Damit wird eine sehr enge, um nicht zu sagen »innige« Verbindung zwischen einem Vektorraum und einem Körper hergestellt.



Kapitel 3 erwartet Sie mit allen Informationen rund um den *Körper*, den mathematischen, wohl gemerkt!

Sie denken, mehr als drei Dimensionen sind unsinnig? Dann lassen Sie sich bitte nicht von den Physikern erwischen, die nach der Vereinheitlichungsformel für alle bekannten Kräfte unseres Universums suchen. Denn deren »String-Theorie« benötigt allein zehn Dimensionen. Aber wo sind die restlichen Dimensionen hin, Sie sehen nur drei? »Dann müssen wir nur genauer hinschauen, vielleicht entdecken wir sie noch«. Das denken etliche theoretische Physiker wirklich, ungelogen!

Der Vektorraum gestattet den Vektoren, in gewisse Beziehungen zueinander zu treten. Die wichtigsten dieser Beziehungen sind:

- ✓ **Addition** zweier Vektoren
- ✓ **Multiplikation** eines Skalars mit einem Vektor
- ✓ **Skalare Multiplikation** zweier Vektoren, deren Ergebnis ein Skalar ist

- ✓ **Vektorprodukt** zweier Vektoren, deren Ergebnis wiederum ein Vektor ist
- ✓ **Spatprodukt**, eine merkwürdige Verknüpfung von drei Vektoren miteinander, deren Endergebnis ein Skalar ist.

## Die Werte in Reih' und Glied bringen

Momentan erscheint es Ihnen vielleicht überflüssig, ein so großes Rad zu drehen, um Vektorräume zu spezifizieren. Nun gut, dann lassen Sie uns wieder ganz bescheiden auf die alltäglichen Dinge des Lebens zu sprechen kommen, zum Beispiel einen Diätplan, meinen oder den Ihren. Nicht, dass Sie es nötig hätten! Um jedwede Konflikte zu vermeiden, sprechen wir über den Diätplan des Herrn Müller.

Dessen Tagesbedarf an Energie könnte beispielsweise 10.000 kJ (Kilojoule, gut 2.000 Kilokalorien) betragen. Dabei setzen wir zwar eine überwiegend sitzende Tätigkeit voraus, gleichzeitig berücksichtigen wir den emotionalen Stress, dem Herrn Müller ausgesetzt ist, weil er sich mit linearer Algebra beschäftigt!

Angenommen, er will unbedingt zum Frühstück ein Buttercroissant (1.750 kJ pro 100 g) verspeisen und in der Mensa gibt es Käsespätzle (1.250 kJ/100g). Aus Zeitgründen gönnt er sich am Abend nur eine Currywurst mit Pommes und Ketchup (1000 kJ/100g). Wie viel von den einzelnen Speisen darf er essen, ohne sein Tagessoll zu überschreiten? Es wird Sie nicht wundern, dass diese Zusammenstellung eine lineare Gleichung darstellt.

$$1.750x + 1.250y + 1000z = 10.000$$

Dabei habe ich der Menge der Croissants die Variable  $x$  und den Spätzle das  $y$  zugeordnet. Die Bedeutung der Variablen  $z$  haben Sie gewiss selbst schon erraten! Was, Ihnen schmeckt dieses Beispiel nicht? Dann ersetzen Sie die einzelnen Speisen durch Köstlichkeiten Ihrer Wahl. Berücksichtigen Sie aber den jeweiligen Energiegehalt! Die Zahlen ändern sich zwar, aber nicht das Prinzip, wie Sie damit umgehen müssen.

Da Sie über drei Unbekannte und nur eine Gleichung verfügen, gibt es ganz viele Lösungen. Sie sehen das noch leichter, wenn Sie die gesamte Gleichung durch 250 teilen:

$$7x + 5y + 4z = 40$$

Zum Beispiel erfüllt  $x = 2$ ,  $y = 2$  und  $z = 4$  die Anforderung. Oder  $x = 1$ ,  $y = 1$  und  $z = 7$ . Hier liste ich Ihnen noch weitere Lösungen auf:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ oder auch } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Die *vektorielle Schreibweise*, also das Übereinanderschreiben und gemeinsame Einklammern der Werte reduziert die Anzahl an Gleichheitszeichen. Und das spart Druckerschwärze und so schon die lineare Algebra sogar noch die Umwelt ...



Gemeint ist damit jedenfalls, dass für den rechten Fall  $x = y = 0$  gilt und nur  $z$  den Wert 10 besitzt. Das bedeutet, Herr Müller streicht Frühstück und Mittagessen, darf dafür aber  $10 \cdot 100 \text{ g} = 1 \text{ kg}$  Currywurst mit Pommes und Ketchup verzehren. Hm, lecker! (Oder auch nicht)

Wenn Sie mir nun vorhalten, für einen Diätplan sei das wohl eine recht ungesunde Zusammenstellung, muss ich Ihnen widersprechen: das Soll von 10.000 kJ pro Tag wird ganz genau erreicht und keineswegs überschritten!

Schön, ich lasse mich von Ihnen überzeugen und akzeptiere, dass wir noch an den Voraussetzungen für eine gesunde Ernährung arbeiten müssen. Denn die Energiezufuhr ist zwar wichtig, aber keineswegs das einzige Kriterium. Ebenso sollten Sie folgende für Herrn Müller ideale Tagesmengen berücksichtigen:

- ✓ 80 g Eiweiß
- ✓ 70 g Fett
- ✓ 330 g Kohlenhydrate

Dabei habe ich wieder einen gewissen Durchschnittsbedarf vorausgesetzt. Das Sinnieren über lineare Algebra ist jedoch schon berücksichtigt.

Lassen Sie uns nun in Tabelle 1.1 zusammenstellen, welche Kenndaten die Lebensmittel aufweisen. Die Werte sind auf je 5 Gramm gerundet und beziehen sich auf 100g Portionen der Lebensmittel.

| Nahrungsmittel                    | Eiweiß | Fett | Kohlenhydrate |
|-----------------------------------|--------|------|---------------|
| Buttercroissants                  | 10     | 20   | 50            |
| Käsespätzle                       | 5      | 15   | 20            |
| Currywurst mit Pommes und Ketchup | 5      | 20   | 20            |

**Tabelle 1.1:** Angenommene Nährwerte pro 100 g

Ihre Aufgabe besteht nun darin, die richtigen Mengen für Herrn Müllers Speiseplan herauszufinden. Dabei sollen die einzelnen Nährwerte genau den Vorgaben entsprechen. Dies führt Sie zu folgendem Gleichungssystem:

$$10x + 5y + 5z = 80$$

$$20x + 15y + 20z = 70$$

$$50x + 20y + 20z = 330$$

Beachten Sie, dass jede Zeile für eine Nährstoff-Vorgabe steht. Die erste entspricht der Eiweißmenge, die zweite bezieht sich auf das Fett, ja, auch das ist auf einem Diätplan lebensnotwendig, und die letzte steht für die Kohlenhydrate.

Die so genannte *Konstantenspalte* auf den rechten Seiten der Gleichungen enthält die jeweiligen Tages-Sollmengen. Geht das nicht eleganter?

Alle Zahlen sind durch 5 teilbar; die letzte Zeile darf sogar durch 10 geteilt werden, ohne dass Brüche entstehen. Das Ergebnis sieht schon etwas hübscher aus:

$$2x + y + z = 16$$

$$4x + 3y + 4z = 14$$

$$5x + 2y + 2z = 33$$

Aber es wird noch besser ...

## Matrizen und ihre Verknüpfungen

Vorhin haben Sie die vektorielle Schreibweise benutzt, um einige Gleichheitszeichen bei den Variablen zu sparen. Wenn Sie es nun mit einem Gleichungssystem mit insgesamt 3 Gleichungen (die Energiezufuhr werde ich weiter unten aufgreifen) und je 3 Unbekannten zu tun haben, können Sie ja eigentlich noch viel mehr Toner einsparen, vorausgesetzt, Sie schreiben die richtigen Zahlenwerte, die auch *Koeffizienten* heißen, immer schön hübsch in die richtigen Zeilen und Spalten. Das Ergebnis ist eine wunderschöne *Matrix*.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Das sieht zwar schon sehr nett aus, allerdings fehlt der Bezug zu den Tages-Sollmengen und den Variablen. Speziell für solche Fälle hat man die Matrix-Vektor Multiplikation erfunden. Sie erhalten insgesamt eine einzige Gleichung, die alle benötigten Informationen beinhaltet und auch *Matrizengleichung* genannt wird. Elegant, nicht wahr?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Wie Sie sehen, entspricht jeder Zeile der Matrix genau eine Gleichung. Die Multiplikation auf der linken Seite wird so durchgeführt, dass Sie die Koeffizienten einer **Zeile** der Matrix mit den Komponenten in den **Spalten des Vektors** multiplizieren und alles zusammen addieren. Das ist bei weitem nicht so kompliziert wie es klingt. Sehen Sie selbst:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \\ 4 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z \\ 5 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Und schon stehen links und rechts des rechten Gleichheitszeichens zwei Vektoren mit je drei Komponenten. Das lösen Sie auf, indem Sie alle drei Komponenten jeweils in eine eigene Gleichung bringen. Das Ergebnis ist nicht überraschend, es handelt sich genau um das Gleichungssystem von oben!

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \\ 4 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z \\ 5 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ 33 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x + y + z = 16 \\ 4x + 3y + 4z = 14 \\ 5x + 2y + 2z = 33 \end{matrix}$$

Endlich haben Sie das Ziel erreicht, die Aufgabenstellung mittels linearer Algebra zu formulieren!

Was bleibt ist die Kleinigkeit, dieses Problem auch zu lösen.



Systematisches Lösen von linearen Gleichungssystemen ist der Gegenstand von Kapitel 6.

Wenn Sie das Doppelte der oberen Zeile der Matrix oder auch des korrespondierenden Gleichungssystems von der unteren subtrahieren, ergibt sich in der ersten Spalte wegen  $5 - 2 \cdot 2$  für  $x$  der Wert 1, während die beiden anderen Spalten aufgrund der Rechnung  $2 - 2 \cdot 1$  Null werden. Die hintere Konstantenspalte ergibt gemäß  $33 - 2 \cdot 16$  ebenfalls den Wert 1. Insgesamt erhalten Sie damit bereits ein erstes Ergebnis:  $x = 1$ .

Das ist schon einmal gut! Herr Müller darf demnach Einhundertgramm Buttercroissant zum Frühstück verköstigen, das entspricht einem Croissant ohne Füllung. Die darf ohnehin nicht vorhanden sein, weil sich sonst die Nährwerte verändern.

Wenn Sie nun  $x$  durch 1 in der Gleichung ersetzen, ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ 33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2 + y + z &= 16 & y + z &= 14 \\ \Rightarrow 4 + 3y + 4z &= 14 & \Rightarrow 3y + 4z &= 10 \\ 5 + 2y + 2z &= 33 & 2y + 2z &= 28 \end{aligned}$$

Die untere Zeile ist genau das Doppelte der oberen und enthält keine zusätzliche Information mehr.



Die Elimination einer Unbekannten in einem Gleichungssystem reduziert nicht allein eine Variable, sondern führt zwangsläufig dazu, dass auch eine der Gleichungen überflüssig wird und keine Information enthält, die nicht bereits in den anderen Gleichungen vorhanden ist.

Aus der oberen Gleichung ergibt sich:  $y = 14 - z$ . Wenn Sie diesen Term in die mittlere Gleichung für  $y$  einsetzen, erhalten Sie etwas Sonderbares:

$$3(14 - z) + 4z = 10 \Rightarrow 42 - 3z + 4z = 10 \Rightarrow z = -32$$

Herr Müller muss demnach Minus 32 kg Currywurst am Abend verzehren?

Die Vorgaben sind somit nicht einzuhalten. Dies lag an der Zusammenstellung der Speisen und nicht an den empfohlenen Tagesmengen und schon gar nicht an der linearen Algebra! Mit diesen drei Speisen alleine lässt sich keine gesunde Nährstoffzufuhr sicherstellen. Wenn Sie erneut einen scharfen Blick in die Tabelle 1.1 werfen, können Sie auch genau erkennen, woran das liegt. Alle drei Gerichte enthalten mehr Fett als Eiweiß. Die empfohlene Tagesmenge an Fett liegt jedoch unterhalb jener von Eiweiß.

Um das Problem zu lösen, müssen Sie also Speisen suchen, deren Fettgehalt deutlich geringer ist. Wie wäre es mit Gartensalat? Die Fettanteile betragen dort nur ein Fünftel des Eiweißes ...

Im Übrigen haben wir weder Getränke noch andere wichtige Faktoren wie Mineralien, Vitamine oder Ballaststoffe berücksichtigt. Außerdem ist die Energiemenge pro Tag zu limitieren, wie am Anfang des Beispiels gezeigt. Jede dieser Anforderungen entspricht einer Gleichung eines linearen Gleichungssystems. Jede weitere Speise stellt eine zusätzliche Unbekannte dar!



Häufig ist ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar, wenn die Anzahl an Gleichungen der Anzahl an Unbekannten entspricht.

Je mehr Unbekannte gegenüber Gleichungen existieren, desto mehr Lösungen sind zu erwarten. Und das schönste dabei ist, dass Herr Müller dann nicht mehr jeden Tag dasselbe essen muss ...

## Determinanten

Eine *Determinante* ist eine Zahl, mit der Sie überprüfen können, ob mit einer Matrix etwas nicht stimmt. Das kann ich Ihnen am Beispiel von Herrn Müllers Diätplan aufzeigen.

Zunächst einmal machen Sie sich klar, dass die Aufgabenstellung weder schwerer noch leichter wird, wenn Sie die vorgesehenen Speisen austauschen. Es ändern sich in der Matrixgleichung lediglich die *Koeffizienten* der Matrix ganz links, der Rest bleibt gleich.

Wenn »Käsespätzle« Herr Müllers Leibgericht sind, kann er dann das System nicht überlisten, indem er einfach 3-mal am Tag dieselbe Speise verköstigt? Die Matrixgleichung würde demnach folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung wiederum entspricht folgendem Gleichungssystem:

$$x + y + z = 16$$

$$3x + 3y + 3z = 14$$

$$2x + 2y + 2z = 33$$

Jetzt sind Sie nicht mehr in der Lage, Mengenangaben für die unbekannten Variablen so zu machen, dass alle Zeilen ein korrektes Ergebnis liefern. Wenn Sie mir nicht glauben, versuchen Sie es doch einfach! Spannend wird es jedoch, wenn ich Ihnen sage, dass die Koeffizientenmatrix uns sofort verrät, dass hier etwas faul ist.

An dieser Stelle kommt die bereits erwähnte *Determinante* ins Spiel. Sobald eine Zeile das Vielfache einer anderen ist, besitzt die Determinante den Wert Null und dann enthält die Matrix nicht mehr genügend Informationen, um alle Unbekannte ordentlich aufzulösen!



Wenn die Determinante einer Matrix ungleich Null ist, gibt es für das zugehörige Gleichungssystem stets eine eindeutige Lösung!



Alles Wissenswerte über Determinanten und deren Berechnung steht in Kapitel 14.

## Alles in einen linearen Zusammenhang bringen

Sie haben gesehen, dass lineare Algebra in vielen Bereichen nützlich sein kann. Insbesondere spielt weder die Anzahl der Dimensionen des Problemraumes noch die Anzahl der Unbekannten eine Rolle, wenn es darum geht, lineare Algebra gewinnbringend zu nutzen. Grundvoraussetzung ist jedoch, dass der Zusammenhang zwischen den Unbekannten stets *linear* ist, also keine Potenzen, Wurzeln, Produkte von Variablen oder ähnlich komplizierte Formeln aufweist. Die Grundform einer linearen Gleichung ist sogar immer gleich und schaut so aus:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Dabei sind die *Koeffizienten*  $a_1, \dots, a_n$  Elemente eines beliebigen Zahlkörpers, zum Beispiel reelle oder komplexe Zahlen, und die *Unbekannten*  $x_1, \dots, x_n$  bilden einen Vektor aus einem Vektorraum:

Mit konkreten Zahlen sieht eine lineare Gleichung beispielsweise so aus:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$$

Die Koeffizienten lauten dabei 3, 2 und  $-1$ .

Sie dürfen die unbekannten Variablen auch als *Vektor* notieren. Um Verwechslungen mit einfachen Skalaren zu vermeiden, können Sie dem Vektor auch einen Pfeil als Hut verpassen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

## Lineare Abbildungen

Die Welt möglicher Anwendungen der linearen Algebra ist unerschöpflich. Betrachten Sie dazu ein Beispiel aus der Technik.

Ein Stahlausleger muss so angelegt werden, dass er eine vorgegebene Gewichtskraft von 10.000 N zu halten in der Lage ist, wie in Abbildung 1.2 dargestellt.

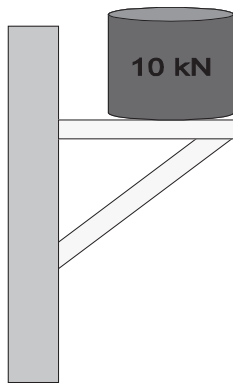


Abbildung 1.2: Stahlausleger

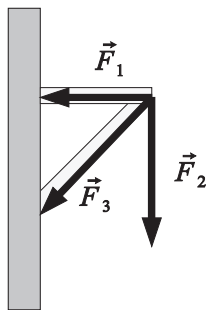


Abbildung 1.3: Kräfte diagramm

Eine vektorielle Modellierung ist hier nahe liegend. Sie erhalten dadurch das *Kräfte diagramm* aus Abbildung 1.3.

Nun ist anschaulich klar, dass die zu berechnenden Kräfte dieselben sind, unabhängig davon, an welchem Objekt sich der Ausleger befindet. Geometrisch formuliert können Sie auch sagen, es spielt keine Rolle, wo Sie den Ursprung des zugehörigen Koordinatensystems anbringen und ob es sich überhaupt um ein kartesisches System (mit einheitlichen Größen und rechtwinkligen Basisvektoren) handelt.



*Koordinaten* werden ausführlich in Kapitel 9 behandelt.

Die konkreten Zahlen der zugehörigen Vektoren und Matrizen mögen unterschiedlich sein, aber das Endergebnis ist stets dasselbe. Es muss also einen berechenbaren Zusammenhang zwischen unterschiedlichen Koordinatensystemen geben. Das Verfahren, um Vektoren eines Koordinatensystems in solche eines anderen zu transformieren, nennt man *lineare Abbildung*.

Lineare Abbildungen sind ein sehr mächtiges Konzept. Sie werden nicht nur zur erwähnten sogenannten *Koordinatentransformation* eingesetzt, sondern überall dort, wo Vektoren eines Vektorraumes in einen anderen abgebildet werden. Sie kennen das vielleicht von vielen algebraischen Funktionen, beispielsweise dem Quadrieren. Hier gilt:

$$y = f(x) = x^2$$

Die Funktion  $f$  weist einem gegebenen Wert  $x$ , dem *Urbild*, einen neuen Wert  $y$ , das *Bild* zu, welcher in diesem Fall genau dem Quadrat von  $x$  entspricht.

Lineare Abbildungen sind Funktionen, die Vektoren aus der Urbildmenge ihre zugehörigen Bildvektoren zuordnen.

»Schön«, denken Sie womöglich, »aber sollten wir uns jetzt nicht wieder mit den wichtigen Dingen der linearen Algebra befassen, wie etwa dem Lösen von linearen Gleichungssystemen?« Aber genau dazu können Sie auch lineare Abbildungen einsetzen! Wenn Sie eine geschickte Abbildungsvorschrift wählen, kann eine Ausgangsmatrix in eine äquivalente Matrix überführt werden, die beispielsweise für die Lösungsbestimmung wesentlich geeigneter ist.

Hierzu ein einfaches Beispiel. Gegeben sei die Matrizengleichung:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn Sie nun beide Seiten von links mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

multiplizieren, was nichts anderes ist als eine spezielle Anwendung einer linearen Abbildung, erhalten Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ausmultipliziert ergibt das:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das sieht gut aus! Spätestens sobald Sie das zugehörige Gleichungssystem betrachten, wird Ihnen der große Fortschritt bewusst:

$$\begin{array}{rcl} x + 0 \cdot y = 1 & \Rightarrow & x = 1 \\ 0 \cdot x + y = 2 & & y = 2 \end{array}$$

Damit ist die Lösung des Gleichungssystems unmittelbar abzulesen, nämlich  $x = 1$  und  $y = 2$ . Diese Lösung gilt auch für das ursprüngliche lineare Gleichungssystem; bitte rechnen Sie das nach, wenn Sie mir nicht glauben!



Matrizen, deren Elemente auf der Hauptdiagonalen sämtlich Eins sind, während alle anderen Elemente Null sind, nennt man *Einheitsmatrizen*.

## Affine Transformationen

Geometrisch lassen sich lineare Abbildungen als *affine Transformationen* deuten. Das sind geometrische Operationen, die Sie vielleicht noch aus der Schulzeit kennen, etwa die *Translation* (Verschiebung), die *Transvektion* (Scherung), die *Spiegelung* oder die *Kontraktion*.



Kapitel 12 behandelt affine Transformationen und deren Anwendungen für die lineare Algebra, klar und anschaulich!

Einige dieser Operationen lassen sich alleine mit Zirkel und Lineal bewerkstelligen. Andere erfordern größeren geometrischen Aufwand. Gemeinsam ist jedoch allen affinen Transformationen, dass sie allein mithilfe der linearen Algebra ausgeführt werden können, ohne einen geometrischen Bezug aufweisen zu müssen.

Doch die Geometrie ist keineswegs das einzige Anwendungsgebiet für affine Transformationen. Möglicherweise haben Sie schon von der *Lorentz-Transformation* gehört? Sie spielt bei der »speziellen Relativitätstheorie« eine wesentliche Rolle und ihr Verständnis ist sicherlich eine wichtige Voraussetzung, wenn Sie sich auf diesem schwierigen Gebiet kundig machen wollen.

Vor Einstein war lediglich die *Galilei-Transformation* bekannt. Diese affine Transformation ist nach wie vor in der klassischen Mechanik gültig. Der Begriff der *Kraft*, wie Isaac Newton ihn definierte, bezieht sich gerade auf Beschleunigungen, die sich durch Galilei-Transformationen nicht ändern.

Zur Umrechnung astronomischer und geografischer Koordinaten sind affine Transformationen ebenfalls seit Jahrhunderten das Mittel der Wahl. Doch auch in der Neuzeit gibt es immer wieder Bedarf an affinen Transformationen. Beispielhaft zu nennen wäre hier etwa die *Denavit-Hartenberg-Transformation*, die seit einigen Jahren das Standardverfahren in der Robotik darstellt, um die kinematischen Vorgänge von Achsendrehungen zu realisieren. Die Denavit-Hartenberg-Transformation besteht übrigens in der Hintereinanderausführung von vier linearen Abbildungen, die sich jeweils in Form von  $4 \times 4$ -Matrizen darstellen lassen.

## Noch bunter geht es nicht

Im Beispiel aus dem letzten Abschnitt haben Sie eine lineare Abbildung durch die Multiplikation einer Matrix ausgeführt. Das ist sehr wichtig. Lineare Abbildungen können demnach mit Matrizen identifiziert werden.

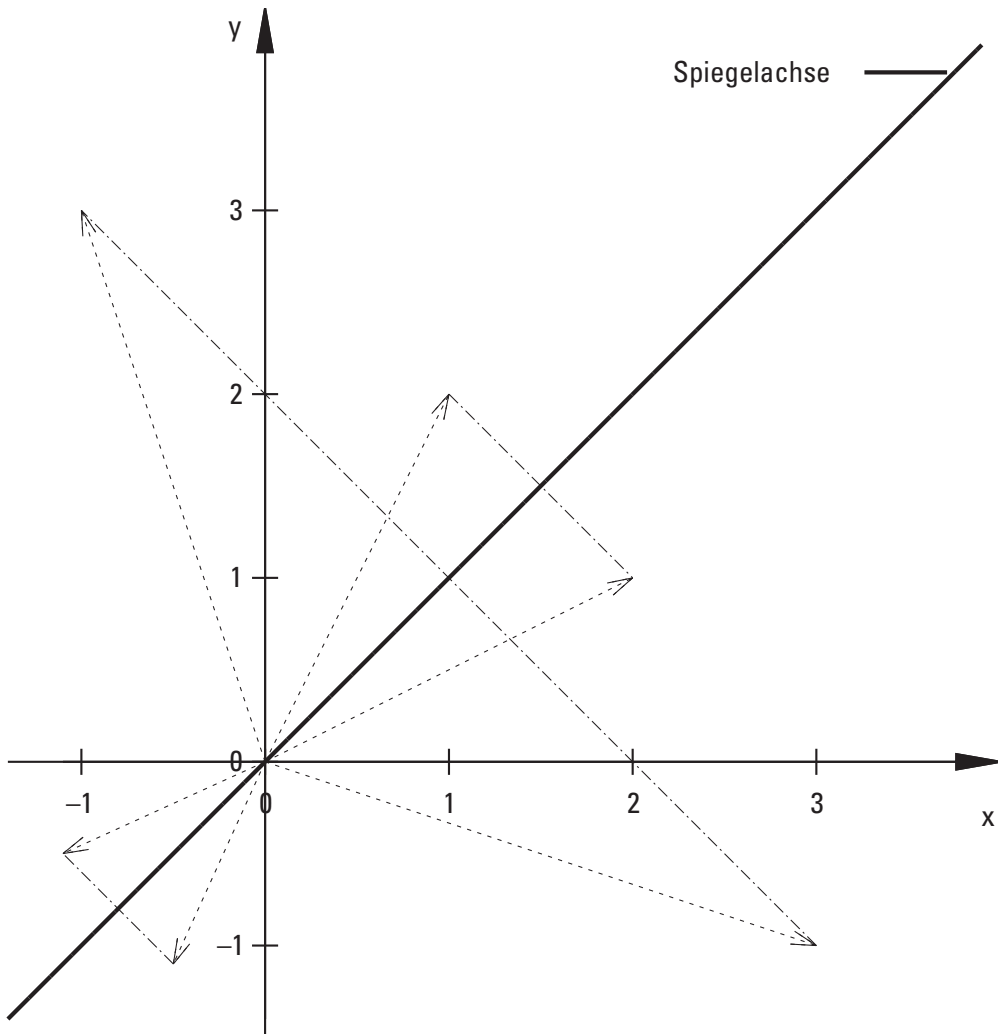
Weiter wissen Sie schon, dass sich zumindest eine Kenngröße der Matrix, nämlich die *Determinante*, durch gewisse Transformationen nicht ändert. Daher wird sich ein Diätplan nicht einfach ändern, wenn alle Portionen von 100 g auf 50 g reduziert werden.



Die Betrachtung geometrischer Abbildungen lässt aber noch weitere Schlüsse zu. Sie können sich schnell klar machen, was zum Beispiel alle Spiegelungen, ganz gleich in welchem Koordinatensystem betrachtet, gemeinsam haben: Punkte (oder Vektoren) auf der Spiegelachse werden auf sich selbst abgebildet.

## Eigenwerte und Eigenvektoren

Vektoren, die durch eine lineare Abbildung nicht verändert werden, oder die zumindest nur gestreckt oder gestaucht werden, nennt man *Eigenvektoren*. Den Streckungsfaktor bezeichnen wir als zugehörigen *Eigenwert*. Alle Vektoren auf einer Spiegelachse sind beispielsweise Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Solche, die genau senkrecht, sprich *orthogonal* zur Spiegelachse verlaufen, sind ebenfalls Eigenvektoren, diesmal jedoch zum Eigenwert  $-1$ , weil ihre Richtung gerade umgekehrt wird. Dies sehen Sie exemplarisch in Abbildung 1.4 dargestellt.



**Abbildung 1.4:** Spiegelachse einer affinen Transformation

Konkret sieht das im zweidimensionalen Raum beispielsweise so aus. Die Matrix  $M_1$  mit

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenschaft, dass alle Vektoren der Form

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$$

mit beliebigen reellen Komponenten auf sich selbst abgebildet werden. Das entspricht wiederum der Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor (von rechts).

$$M_1 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = \vec{v}$$

Damit sind alle Vektoren der Form  $\vec{v}$  Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Weiter können Sie leicht nachrechnen, dass für Vektoren mit

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -r \\ r \end{pmatrix}$$

gilt:

$$M_1 \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} = -\vec{w}$$

Damit sind alle Vektoren der Form  $\vec{w}$  Eigenvektoren zum Eigenwert  $-1$ . Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten erzeugen einen speziellen Vektorraum, den so genannten *Eigenraum*.



In die eigenartige Welt der Eigenvektoren werden Sie in Kapitel 16 entführt. Aber geben Sie acht, dass Sie dort nicht zu lange verharren.

So weit, so gut. Ich stelle Ihnen jetzt eine weitere Matrix  $M_2$  vor.

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Als Eigenvektor finden Sie beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix}$$

Diese Eigenvektoren gehören sichtlich zum Eigenwert 1. Weiter sehen Sie, dass gilt:

$$M_2 \cdot \begin{pmatrix} -r \\ 3r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \\ 3r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -3r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -r \\ 3r \end{pmatrix}$$

Somit sind alle Vektoren, deren  $y$ -Komponente dem Minus-Dreifachen der  $x$ -Komponente entspricht, Eigenvektoren zum Eigenwert  $-1$ . Aber damit ist doch ebenfalls klar, dass die Matrix  $M_2$  zwangsläufig eine *Schrägspiegelung* sein muss, deren Reflexionsachse nicht senkrecht zur Spiegelachse steht.

Eine andere affine Abbildung im zweidimensionalen Raum mit den Eigenwerten  $1$  und  $-1$  kommt nämlich nicht in Frage!



Eigenvektoren zu zwei unterschiedlichen Eigenwerten spezifizieren das Verhalten einer linearen Abbildung im zweidimensionalen Raum eindeutig!

## Diagonalisieren und der Spektralsatz

Da die Matrizen  $M_1$  und  $M_2$  – bis auf Koordinatentransformation – derselben linearen Abbildung entsprechen, müssen sie auch gewisse Gemeinsamkeiten besitzen. Tatsächlich nennt man Matrizen, die unterschiedlichen Darstellungen derselben affinen Transformation sind, *ähnlich*.

»Klasse«, werden Sie hier denken, »da haben sich die Mathematiker endlich einmal auf einen einprägsamen Fachterminus geeinigt«. Und Recht haben Sie!

Ähnliche Matrizen sind also solche, die im Grunde dieselbe lineare Abbildung bezogen auf ein anderes Koordinatensystem darstellen. Und die Matrixdarstellung der linearen Abbildung, die eine solche Transformation ermöglicht, heißt *Übergangsmatrix*. Um die Matrixdarstellung des einen Koordinatensystems in jene eines anderen zu überführen, benötigen Sie neben der Übergangsmatrix auch deren *Inverse*. Ja, auch Matrizen besitzen Inverse! So wie  $\frac{1}{2}$  die Inverse von  $2$  bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation von Zahlen ist, weil  $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  gilt, so besitzt auch eine Übergangsmatrix eine Inverse. Sobald Sie eine Matrix mit ihrer Inversen multiplizieren, ergibt sich die Einheitsmatrix!

Sie multiplizieren die Übergangsmatrix von rechts und deren Inverse von links mit der Originalmatrix und erhalten als Ergebnis eine ähnliche Matrix derselben linearen Abbildung, jedoch bezogen auf ein anderes Koordinatensystem. Man spricht hier auch vom *Basiswechsel*.



Alles zum Thema *Basiswechsel* und noch viel mehr finden Sie in Kapitel 15.

Sicher warten Sie schon gespannt auf die Übergangsmatrix  $P$ , um  $M_1$  in  $M_2$  zu überführen. Hier ist sie:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Witz der Inversen besteht, wie gesagt darin, dass ihr Produkt mit der Originalmatrix stets zur Einheitsmatrix führt.

Rechnen Sie selbst nach, dass  $P$  tatsächlich  $M_1$  in  $M_2$  überführt. Ermitteln Sie also den Wert von  $P^{-1} \cdot M_1 \cdot P$ .

Lesen Sie erst weiter, sobald Sie die Lösung gefunden haben!

So schnell schon fertig? Ok, das ist das Ergebnis:

$$P^{-1} \cdot M_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = M_2$$

Wenn  $M_1$  und  $M_2$  schon ähnlich sind, wollen Sie sicher wissen, ob nicht noch mehr Matrizen existieren, die ebenfalls zu diesen beiden ähnlich sind.

Aber keine Angst, ich möchte Sie gewiss nicht langweilen mit der Aufzählung von zigtausenden ähnlicher Matrizen. Die Frage ist nur, welche Matrix unter allen zueinander ähnlichen Matrizen für unseren Zweck am geeignetsten erscheint.

Der tiefere innere Zusammenhalt ähnlicher Matrizen hatte mit Eigenvektoren und Eigenwerten zu tun. Alle ähnlichen Matrizen besitzen nicht nur dieselben Eigenwerte, sondern stellen auch die gleiche affine Transformation dar. Unter allen ähnlichen Matrizen sind solche zu bevorzugen, bei denen die Eigenwerte recht elegant abzulesen sind. So wie ein lineares Gleichungssystem dann gerne gesehen wird, wenn die zugehörige Koeffizientenmatrix eine Einheitsmatrix darstellt, ist die Suche nach einer optimalen ähnlichen Matrix dann abgeschlossen, wenn Sie eine *Diagonalmatrix* gefunden haben. Bei dieser entsprechen die Werte auf der Hauptdiagonalen nämlich genau den Eigenwerten!

Betrachten Sie dazu beispielsweise das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{lcl} x & = & 7 \\ y & = & -3 \\ z & = & 4 \end{array}$$

Die Koeffizientenmatrix ist eine Einheitsmatrix, deswegen erkennen Sie die Lösung ohne weitere Rechnung.

Ebenso besitzt die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Idealgestalt, weil Sie die Eigenwerte 3, -4 und 2 unmittelbar ablesen können.

Den Vorgang, eine beliebige Matrix in die Idealgestalt zu überführen, nennt man *Diagonalisierung* und ist eines der bedeutsamsten Verfahren der linearen Algebra.



Von hier aus ist der Weg zum Zentrum der Erkenntnis, zum Herz aller Dinge, zwar noch weit, wenn Sie jedoch unbedingt eine Abkürzung gehen wollen, werde ich Sie nicht daran hindern: In Kapitel 17 erfahren Sie alles über Diagonalisierung! Sollten Sie sich jedoch verlaufen, sagen Sie nicht, ich hätte Sie nicht gewarnt!

Das Ergebnis der Diagonalisierung von  $M_1$  oder  $M_2$ , was dasselbe ist, kennen Sie bereits. Die Diagonalmatrix  $D$  hat dann folgende Gestalt:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In  $D$  sind die Elemente auf der Hauptdiagonalen nunmehr die Eigenwerte. Auch die Suche nach den Eigenvektoren, die zu diesen Eigenwerten gehören, gestaltet sich überraschend einfach. Es gilt nämlich:

$$D \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Basisvektoren stellen bei einer Diagonalmatrix gerade die Eigenvektoren dar, und dies ist im Sinne der linearen Algebra der Idealzustand. Daran erkennen Sie die entscheidenden Eigenschaften der linearen Abbildung, die diese Matrix – und alle zu ihr ähnlichen – repräsentiert. Im vorliegenden Fall handelt es sich um eine *Spiegelung*.

Damit stoßen Sie auf die Frage, ob jede beliebige Matrix diagonalisiert werden kann. Dies kann ja wohl nicht der Fall sein, weil beispielsweise jede Menge affiner Transformationen existierte, die keine Eigenwerte besitzen, etwa *Rotationen*. Jeder Vektor wird gedreht, deswegen kann keiner auf ein Vielfaches seiner selbst abgebildet werden.

Der *Spektralsatz*, der gerne als der Zenit der linearen Algebra betrachtet wird, liefert Ihnen einen wesentlichen Anhaltspunkt, wann eine vorgegebene Matrix  $M$  und damit die zugehörige lineare Abbildung diagonalisiert werden kann.

Für reelle Matrizen gilt:



Gemäß *Spektralsatz* sind symmetrische Matrizen stets diagonalisierbar.

Ein vergleichbares Resultat wird auch für komplexe Matrizen erzielt.



Gemäß *Spektralsatz* sind hermitesche Matrizen stets diagonalisierbar.



Was der Spektralsatz noch alles besagt und was genau eine Matrix *hermitesch* macht, finden Sie in Kapitel 17 dieses Buches!

## Wie man den linearen Überblick behält

Nach diesem Höhenflug durch die schöne Welt der linearen Algebra möchte ich Ihnen zum Abschluss des Kapitels die wichtigsten Aspekte Revue passieren lassen. Damit Sie sich nicht langweilen, werde ich das in genau der umgekehrten Reihenfolge vornehmen.

- ✓ Um den *Spektralsatz* und seine Anwendungsmöglichkeiten zu verstehen, ist es nötig, das innere Wesen von Matrizen zu begreifen, das sich in *Eigenwerten* und *Eigenvektoren* abzeichnet.
- ✓ Überhaupt sind *Matrizen* sehr vielseitige Objekte. Sie sind ursprünglich als Verallgemeinerung von Koeffizienten aus linearen Gleichungssystemen hervorgegangen und inzwischen wurden so viele Eigenschaften entdeckt, dass man allein mit der Diskussion von Matrizen ganze Bücher füllen könnte.
- ✓ Matrizen können, müssen aber nicht *diagonalisierbar*, *invertierbar* oder *ähnlich* sein. Auf Matrizen werden grundsätzlich *Matrix-*, *Vektor-* und *Skalare Multiplikation* definiert. Die mysteriöseste Zahl, die Sie einer Matrix zuordnen, ist jedoch die *Determinante*.
- ✓ Wenn ein Gleichungssystem prinzipielle Schwierigkeiten aufweist, dann ist die Determinante der zugehörigen Koeffizientenmatrix Null. Entweder wollte da jemand bei seinem Diätplan mogeln, oder die Aufgabenstellung selbst weist widersprüchliche Vorgaben auf.

Die Strukturen, mit denen sich die lineare Algebra befasst, sind *Vektorräume* und *Körper*. Diese definieren die erlaubten Operationen und lassen interessante Zusammenhänge erkennen. Funktionen, die Elemente eines Vektorraumes in einen anderen überführen, nennt man *lineare Abbildungen* oder *Homomorphismen*, was immer Ihnen besser gefällt. Und das Beste daran: Vektorräume finden sich überall!

### Orte, wo sich Vektorräume »verstecken«

Sie können über symmetrischen  $2 \times 2$ -Matrizen einen Vektorraum erzeugen. Natürlich auch über beliebigen anderen Formen von  $n \times m$ -Matrizen. Ebenso über Polynomen von einem bestimmten Maximalgrad, zum Beispiel drei. Die Koeffizienten dieser Polynome können beliebigen Zahlkörpern entstammen; gern genommen werden hier  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  und in selteneren Fällen auch  $\mathbb{Q}$ . Oder, warum nicht, auch Vektorräume über den linearen Abbildungen zwischen zwei (anderen) Vektorräumen sind schnell spezifiziert. Die Elemente dieses Raumes sind dann selbst wiederum lineare Abbildungen – ganz schön abgefahren!

- ✓ Ausgangspunkt für die lineare Algebra sind oft ganz gewöhnliche Alltagsprobleme, mit zumeist technischem, naturwissenschaftlichem oder wirtschaftswissenschaftlichem Bezug. Häufig spielen zahlreiche unbekannte Variablen eine Rolle und geometrische Probleme lassen sich auf beliebig viele Dimensionen übertragen.
- ✓ Entscheidend für die Behandlung einer gegebenen Aufgabenstellung bleibt allerdings, dass die Fragestellung sich auf *lineare* Zusammenhänge bezieht. Dies ist geometrisch für Punkte, Geraden, Ebenen und Räume beliebiger Dimension der Fall. Ungeeignet und außerhalb des linearen Bezugs sind dagegen gekrümmte Flächen wie etwa Paraboloiden oder Ellipsoide. Deren algebraische Darstellungen weisen zum Beispiel Quadrate in den Unbekannten auf.

- ✓ Physikalisch muss eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit erfolgen. Beschleunigungs- oder Abbremsvorgänge erfordern eine analytische Herangehensweise, bei der Differenzial- und Integralrechnung zum Zuge kommen.

Allerdings können Methoden der Analysis auf überaus fruchtbare Weise mit jenen der linearen Algebra verknüpft werden. Dies wird unter dem Schlagwort *Vektoranalysis* geführt und erlaubt die Lösung auch hochkomplexer, nicht-linearer Prozesse. Differentialgleichungen sind ein Paradebeispiel für die Verknüpfung von Methoden der linearen Algebra mit solchen der Analysis. Die *Hauptachsentransformation*, ursprünglich aus der Geometrie erwachsen und insbesondere auf nicht-lineare Objekte bezogen, wird Ihnen jedoch auch auf dem weiteren Weg durch das Labyrinth begegnen und Sie hoffentlich motivieren, den Weg bis ans Ende zu gehen ...



Die Hauptachsentransformation und Ihre Durchführung mithilfe der linearen Algebra wird Sie gewiss faszinieren. Dies und mehr erwartet Sie in Kapitel 12!

