

# Table des Matières

CHEAPITRE I. EVENEMENTS ET VARIABLES ALEATOIRES .....	1
1. Epreuves, événements et variables aléatoires .....	1
1.1. Le hasard .....	1
1.2. Description ensembliste des événements .....	2
1.3. Variables aléatoires .....	7
2. Tribus .....	10
2.1. Événements intéressants .....	10
2.2. Événements observables .....	12
2.3. Tribus .....	14
Exercices .....	17
 CHAPITRE II. FORMULES DE BAYES ET INDEPENDANCE .....	18
1. Probabilité .....	18
1.1. Statistique et probabilités .....	18
1.2. Les axiomes .....	22
2. Indépendance statistique .....	24
2.1. Probabilité conditionnelle .....	24
2.2. Indépendance .....	26
3. Un problème d'existence .....	28
Exercices .....	31
 CHAPITRE III. QUELQUES MODELES PROBABILISTES ELEMENTAIRES .....	33
1. Les trois prisonniers .....	33
2. Un pari intelligent .....	37
3. Un peu de génétique .....	39
4. La corde de Bertrand .....	45
Exercices .....	47

<b>CHAPITRE IV. DISTRIBUTIONS DE PROBABILITE DISCRETES .....</b>	<b>49</b>
1. Distributions usuelles .....	49
1.1. La distribution de Bernoulli .....	49
1.2. La distribution poissonnienne .....	51
1.3. La distribution binomiale .....	51
1.4. La distribution multinomiale .....	53
2. Espérance .....	54
2.1. Définition et propriétés .....	54
2.2. Moyenne, variance .....	57
2.3. Inégalités remarquables .....	58
3. Convergences en probabilité et en loi .....	61
3.1. Convergence en probabilité et la loi faible des grands nombres .....	61
3.2. Convergence en loi et le théorème des événements rares de Poisson .....	62
4. Indépendance .....	64
4.1. Somme de deux variables aléatoires indépendantes .....	64
4.2. La formule du produit .....	66
5. Fonctions génératrices .....	67
5.1. Définitions et exemples .....	67
5.2. Propriétés de la fonction génératrice .....	68
Exercices .....	77
<b>CHAPITRE V. QUANTITE D'INFORMATION .....</b>	<b>80</b>
1. Entropie de Shannon et codage .....	80
1.1. Les codes uniquement déchiffrables .....	80
1.2. Borne de Shannon sur la longueur moyenne d'un code déchiffrable .....	85
2. Le code optimal de Huffman .....	87
2.1. Présentation de l'algorithme de Huffman .....	87
2.2. Optimalité de l'algorithme de Huffman .....	89
2.3. Deux algorithmes de codage suboptimaux .....	92

3.	Introduction aux questionnaires .....	94
3.1.	Questionnaires et codage .....	94
3.2.	Le problème des billes .....	95
3.3.	$H_D(p)$ est bien une quantité d'information .....	96
4.	Compression de l'information .....	97
4.1.	Les suites typiques .....	97
4.2.	Le théorème de compression .....	99
4.3.	Compression de l'information et redondance .....	101
5.	L'interprétation de Boltzmann .....	102
	Exercices .....	105
 CHAPITRE VI. LOIS DE PROBABILITE AVEC DENSITE .....		107
1.	Intégrales .....	107
1.1.	Rappels et anticipations .....	107
1.2.	Le théorème de Fubini .....	111
2.	Densité de probabilité des vecteurs aléatoires .....	113
2.1.	Moyenne, covariance, fonction caractéristique .....	113
2.2.	Un premier catalogue de densités de probabilités usuelles .....	116
3.	Fonctions caractéristiques et indépendance .....	120
3.1.	Fonction caractéristique et loi .....	120
3.2.	Somme de variables aléatoires indépendantes .....	122
4.	Transformations des vecteurs aléatoires .....	125
4.1.	La formule du changement de variables .....	125
4.2.	Le cas où le changement de variables n'est pas bijectif .....	128
	Exercices .....	132
 CHAPITRE VII. PROCESSUS DE POISSON .....		136
1.	Le processus de Poisson homogène sur la droite .....	136
1.1.	Définition .....	136
1.2.	Le système infinitésimal d'un processus de Poisson homogène .....	137
1.3.	Répartition des points d'un processus de Poisson .....	141

2.	Processus de Poisson dans le plan .....	143
2.1.	Définition .....	143
2.2.	Le théorème des événements rares pour les processus de Poisson sur $\mathbb{R}^n$ .....	144
2.3.	Processus de Poisson non homogène sur la droite .....	146
3.	Opérations sur les processus de Poisson .....	147
3.1.	Superposition .....	147
3.2.	Effacement aléatoire .....	148
3.3.	Filtrage .....	151
	Exercices .....	155
	 CHAPITRE VIII. LES GAUSSIENNES .....	 157
1.	Vecteurs gaussiens .....	157
1.1.	Pourquoi les gaussiennes ? .....	157
1.2.	Variable aléatoire gaussienne .....	158
1.3.	Vecteur aléatoire gaussien .....	159
2.	Lois des vecteurs gaussiens .....	160
2.1.	Densité d'un vecteur gaussien non dégénéré .....	160
2.2.	Vecteur gaussien à deux dimensions .....	163
2.3.	Vecteur gaussien dégénéré .....	165
2.4.	Indépendance et non-corrélation dans les vecteurs gaussiens .....	167
3.	Statistiques des échantillons gaussiens .....	168
3.1.	Moyenne empirique et variance d'un échantillon gaussien .....	168
3.2.	Statistiques de Fisher, Snedecor et Student .....	170
	Exercices .....	172
	 CHAPITRE IX. REGRESSION LINEAIRE .....	 174
1.	Variables aléatoires de carré intégrable .....	174
1.1.	Inégalité de Tchebychev .....	174
1.2.	Coefficient de corrélation et inégalité de Schwarz .....	176

2.	Régression linéaire .....	178
2.1.	Un problème d'optimisation .....	178
2.2.	Le cas unidimensionnel .....	179
2.3.	Cas multidimensionnel .....	181
	Exercices .....	186
CHAPITRE X. ESPERANCE CONDITIONNELLE .....		188
1.	Définitions et propriétés élémentaires .....	188
1.1.	Densité de probabilité conditionnelle .....	188
1.2.	Le cas mixte .....	191
1.3.	Propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle .....	193
2.	Conditionnement des vecteurs aléatoires gaussiens .....	198
3.	Le filtre de Kalman-Bucy .....	201
3.1.	Un problème de guidage .....	202
3.2.	L'algorithme de Kalman-Bucy .....	208
3.3.	L'équation de Riccati du gain .....	211
	Exercices .....	212
CHAPITRE XI. CONVERGENCES .....		214
1.	Introduction : La loi des grands nombres et le théorème de la loi gaussienne limite .....	214
1.1.	La loi des grands nombres .....	214
1.2.	Le théorème de la loi gaussienne limite ("Central limit theorem") .....	215
2.	Continuité séquentielle de la probabilité et lemme de Borel-Cantelli .....	216
2.1.	Continuité séquentielle .....	216
2.2.	Le lemme de Borel-Cantelli .....	219
3.	Convergence presque sûre et loi des grands nombres .....	223
3.1.	Convergence presque sûre .....	223
3.2.	La hiérarchie des convergences .....	225
3.3.	Loi des grands nombres pour les suites non-corrélées .....	227
3.4.	Le lemme de Glivenko-Cantelli .....	229

4. Les déviations à la loi des grands nombres .....	231
5. Convergence en loi .....	236
5.1. Définitions .....	236
5.2. Le critère des fonctions caractéristiques .....	239
Exercices .....	242
 CHAPITRE XII. TESTS D'HYPOTHESES .....	246
1. Tests d'hypothèses bayesiennes .....	246
1.1. Etats de la nature et observation .....	246
1.2. Exemples de la théorie des communications .....	247
1.3. Critère de la probabilité d'erreur et décision optimale .....	249
1.4. Hypothèses gaussiennes .....	251
1.5. Observations discrètes .....	254
2. Lemme de Neyman-Pearson .....	255
2.1. Le paradigme de la détection : erreurs de première et deuxième espèce .....	255
2.2. Le test de Neyman-Pearson .....	258
3. Le test du $\chi^2$ .....	260
3.1. Position du problème et description du test .....	260
3.2. Démonstration de la convergence en loi de la statistique $T_n$ vers un $\chi^2$ .....	263
Exercices .....	267
 SOLUTIONS DES EXERCICES	
Chapitre I. ....	270
Chapitre II. ....	272
Chapitre III. ....	275
Chapitre IV. ....	280
Chapitre V. ....	285
Chapitre VI. ....	291

Chapitre VII.	301
Chapitre VIII.	306
Chapitre IX.	310
Chapitre X.	313
Chapitre XI.	319
Chapitre XII.	324
EXERCICES NON CORRIGÉS	328
BIBLIOGRAPHIE	333
INDEX	335