Inhaltsverzeichnis

Oft benutzte Bezeichnungen XVII

Kapitel 1. Einführung 1

TEIL I. HILBERT-RAUM 7

Kapitel 2. Skalarprodukt von Funktionen. Norm, Metrik 7

Kapitel 3. Der Raum L_2 18

Kapitel 4. Konvergenz im Raum $L_2(G)$ (Konvergenz im Mittel). Vollständiger Raum. Separabler Raum 24
a) Konvergenz im Raum $L_2(G)$ 24
b) Vollständigkeit 28
c) Dichte. Separabilität 30

Kapitel 5. Orthogonalsysteme im Raum $L_2(G)$ 33
a) Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit in $L_2(G)$ 33
b) Orthogonal- und Orthonormalsysteme in $L_2(G)$ 36
c) Fourier-Reihen. Vollständige Systeme. Das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren 39
d) Zerlegung des Raumes $L_2(G)$ in orthogonale Teilräume 48
e) Einige Eigenschaften des Skalarproduktes 51

Kapitel 6. Hilbert-Raum 53
a) Unitärer Raum. Hilbert-Raum 53
b) Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit im Hilbert-Raum. Orthogonalsysteme, Fourier-Reihen 61
c) Orthogonale Teilräume. Einige Eigenschaften des Skalarproduktes 65
d) Komplexer Hilbert-Raum 67

Kapitel 7. Einige Bemerkungen zu den vorhergehenden Kapiteln. Normierter Raum, Banach-Raum 69

Kapitel 8. Operatoren und Funktionale, insbesondere im Hilbert-Raum 74
a) Operatoren im Hilbert-Raum 75
b) Symmetrische, positive und positiv definite Operatoren. Dichte Mengen . . 87
c) Funktionale. Der Satz von Riesz 97

Teil II. VARIATIONSMETHODEN 101

Kapitel 9. Satz vom Minimum eines quadratischen Funktionals und seine Konsequenzen 101

Kapitel 10. Der Raum H_A 110

Kapitel 11. Existenz des Minimums des Funktionals F im Raum H_A. Verallgemeinerte Lösungen 123

Kapitel 12. Die Methode der Orthonormalreihen. Ein Beispiel . . . 138

Kapitel 13. Das Ritzsche Verfahren 145

Kapitel 14. Das Galerkin-Verfahren 154

Kapitel 15. Methode der kleinsten Quadrate. Courantsche Methode 159

Kapitel 16. Die Gradientenmethode. Ein Beispiel 165

Kapitel 17. Zusammenfassung der Kapitel 9 bis 16 171

Teil III. ANWENDUNG DER VARIATIONSMETHODEN ZUR LÖSUNG GEWÖHNLICHER UND PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT RANDBEDINGUNGEN 181

Kapitel 18. Friedrichssche Ungleichung. Poincarésche Ungleichung 182

Kapitel 19. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit Randbedingungen . . . 194
a) Gleichungen zweiter Ordnung 194
b) Gleichungen höherer Ordnung 216

Kapitel 20. Probleme bei der Auswahl einer Basis 220
a) Allgemeine Grundsätze 220
b) Auswahl einer Basis im Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen 232

Kapitel 21. Numerische Beispiele: Gewöhnliche Differentialgleichungen 236

Kapitel 22. Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung 252

Kapitel 23. Der biharmonische Operator (die Platten- und Tragwandgleichung) 265

Kapitel 24. Operatoren der mathematischen Elastizitätstheorie 275

Kapitel 25. Basiswahl bei partiellen Differentialgleichungen mit Randbedingungen 285

Kapitel 26. Numerische Beispiele: Partielle Differentialgleichungen 293

Kapitel 27. Zusammenfassung der Kapitel 18 bis 26 306

TEIL IV. THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT RANDBEDINGUNGEN AUF DER GRUNDLAGE DES SATZES VON LAX UND MILGRAM 313

Kapitel 28. Lebesguesches Integral. Gebiete mit einem Lipschitz-Rand 314

Kapitel 29. Der Raum $W_2^{(k)}(G)$ 330

Kapitel 30. Spuren der Funktionen aus dem Raum $W_2^{(k)}(G)$. Der Raum $\mathring{W}_2^{(k)}(G)$. Verallgemeinerte Friedrichssche und Poincarésche Ungleichung 340

Kapitel 31. Elliptische Differentialoperatoren der Ordnung $2k$. Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen 347

Kapitel 32. Formulierung von Randwertproblemen 359
a) Stabile und instabile Randbedingungen 359
b) Die schwache Lösung eines Randwertproblems. Spezialfälle 363
c) Definition der schwachen Lösung eines Randwertproblems. Der allgemeine Fall 371

Kapitel 33. Existenz der schwachen Lösung eines Randwertproblems. V-Elliptizität. Der Satz von Lax und Milgram 390

Kapitel 34. Anwendung von Variationsmethoden zur Bestimmung schwacher Lösungen von Randwertproblemen 407
a) Homogene Randbedingungen. 407
b) Nichthomogene Randbedingungen 417
c) Die Methode der kleinsten Quadrate 422

Kapitel 35. Das Neumannsche Problem für Gleichungen der Ordnung $2k$ (der Fall, wenn die Form $((v, u))$ nicht V-elliptisch ist). 426

Kapitel 36. Zusammenfassung und Ergänzung der Kapitel 28 bis 35 445

TEIL V. DAS EIGENWERTPROBLEM 453

Kapitel 37. Einführung 453

Kapitel 38. Vollstetige Operatoren 457

Kapitel 39. Das Eigenwertproblem für Differentialoperatoren 475

Kapitel 40. Das Ritzsche Verfahren beim Eigenwertproblem 491
a) Das Ritzsche Verfahren 491
b) Das Problem der Fehlerabschätzung 499

Kapitel 41. Numerische Beispiele 511

TEIL VI. EINIGE SPEZIELLE METHODEN. REGULARITÄT DER SCHWACHEN LÖSUNG 518

Kapitel 42. Die Methode der finiten Elemente 518

Kapitel 43. Die Methode der kleinsten Quadrate am Rand für die biharmonische Gleichung (für das Problem der Tragwände). Das Trefftzsche Verfahren zur Lösung des Dirichletschen Problems für die Laplacesche Gleichung 528
a) Das erste Randwertproblem für die biharmonische Gleichung (das Problem der Tragwände) 529
b) Beschreibung der Methode der kleinsten Quadrate am Rand für das biharmonische Problem 532
c) Die Konvergenz der Methode 534
d) Das Trefftzsche Verfahren 539

Kapitel 44. Die Methode der Orthogonalprojektion 542

Kapitel 45. Anwendung des Ritzschen Verfahrens zur Lösung parabolischer Gleichungen mit Randbedingungen 551

Kapitel 46. Regularität der schwachen Lösung, Erfüllung der gegebenen Gleichung und der Randbedingungen im klassischen Sinne. Existenz einer Funktion $w \in W_2^{(k)}(G)$, die die gegebenen Randbedingungen erfüllt 564
a) Glattheit der schwachen Lösung 564
b) Existenz einer Funktion $w \in W_2^{(k)}(G)$, die die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt 568

Kapitel 47. Abschließende Bemerkungen. Perspektiven der dargestellten Theorie 571

Tabelle zur Zusammenstellung der geläufigsten Funktionale und der Systeme der Ritzschen Gleichungen 574

Literatur 586

Register 589