

Max Koecher

# Lineare Algebra und analytische Geometrie

Zweite Auflage

Mit 35 Abbildungen



Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg New York Tokyo  
1985

# Inhaltsverzeichnis

## Teil A. Lineare Algebra I

<i>Kapitel 1. Vektorräume . . . . .</i>	1
§ 1. Der Begriff eines Vektorraumes . . . . .	1
1. Vorbemerkung 2. Vektorräume 3. Unterräume 4. Geraden 5. Das Standardbeispiel $K^n$ 6. Geometrische Deutung 7. Anfänge einer Geometrie im $\mathbb{R}^2$	
§ 2*. Über den Ursprung der Vektorräume . . . . .	10
1. Die GRASSMANNSCHE Ausdehnungslehre 2. GRASSMANN: Übersicht über die allgemeine Formenlehre 3. Extensive Größen als Elemente eines Vektorraumes 4. Reaktion der Mathematiker 5. Der moderne Vektorraumbegriff	
§ 3. Beispiele von Vektorräumen . . . . .	15
1. Einleitung 2. Reelle Folgen 3. Vektorräume von Abbildungen 4. Stetige Funktionen 5. Reelle Polynome 6*. Reell-analytische Funktionen 7*. Lineare Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung 8. Die Vektorräume $\text{Abb}[M, K]$	
§ 4. Elementare Theorie der Vektorräume . . . . .	20
1. Vorbemerkung 2. Homogene Gleichungen 3. Erzeugung von Unterräumen 4. Lineare Abhängigkeit 5. Der Begriff einer Basis 6. Die Dimension eines Vektorraums 7. Der Dimensions-Satz 8*. Der Basis-Satz für beliebige Vektorräume 9*. Ein Glasperlen-Spiel	
§ 5. Anwendungen . . . . .	30
1. Die reellen Zahlen als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ 2. Beispiele 3. Der Rang einer Teilmenge 4. Anwendung auf lineare Gleichungssysteme	
§ 6. Homomorphismen von Vektorräumen . . . . .	35
1. Einleitung 2. Definition und einfachste Eigenschaften 3. Kern und Bild 4. Die Dimensionsformel für Homomorphismen 5. Äquivalenz-Satz für Homomorphismen 6. Der Rang eines Homomorphismus 7. Anwendung auf homogene lineare Gleichungen 8. Beispiele 9*. Die Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$	
§ 7*. Linearformen und der duale Raum . . . . .	45
1. Vorbemerkungen 2. Definition und Beispiele 3. Existenz von Linearformen 4. Der Dual-Raum 5. Linearformen des Vektorraums der stetigen Funktionen	
§ 8*. Direkte Summen und Komplemente . . . . .	48
1. Summe und direkte Summe 2. Komplemente 3. Die Dimensionsformel für Summen 4. Die Bild-Kern-Zerlegung	

<i>Kapitel 2. Matrizen</i>	52
§ 1. Erste Eigenschaften	52
1. Der Begriff einer Matrix	2.
2. Über den Vorteil von Doppelindizes	
3. $\text{Mat}(m, n; K)$ als $K$ -Vektorraum	4.
5. Spalten- und Zeilenrang	6.
6. Elementare Umformungen	7.
7. Die Ranggleichung	8.
8. Kästchenschreibweise und Rangberechnung	9.
9. Zur Geschichte des Rang-Begriffes	
§ 2. Matrizenrechnung	62
1. Arthur CAYLEY oder die Erfundung der Matrizenrechnung	2.
2. Produkte von Matrizen	3.
3. Produkte von Vektoren	4.
4. Homomorphismen zwischen Standard-Räumen	5.
5. Erntezeit	6.
6. Das Skalarprodukt	7*
7*. Rang $A \leq r$	8.
8. Kästchenrechnung	
§ 3. Algebren	70
1. Einleitung	2.
2. Der Begriff einer Algebra	3.
3. Invertierbare Elemente	4.
4. Ringe	
5. Beispiele	
§ 4. Der Begriff einer Gruppe	73
1. Halbgruppen	2.
2. Gruppen	3.
3. Untergruppen	4.
4. Kommutative Gruppen	
5. Homomorphismen	6.
6. Normalteiler	7.
7. Historische Bemerkungen	
§ 5. Matrix-Algebren	79
1. $\text{Mat}(n; K)$ und $GL(n; K)$	2.
2. Der Äquivalenz-Satz für invertierbare Matrizen	
3. Die Invarianz des Ranges	4.
4. Spezielle invertierbare Matrizen	5*
5*. Zentralisator und Zentrum	6.
6. Die Spur einer Matrix	7.
7. Die Algebra $\text{Mat}(2; K)$	
§ 6. Der Normalformen-Satz	86
1. Elementar-Matrizen	2.
2. Zusammenhang mit elementaren Umformungen	
3. Anwendungen	4*
4*. Die WEYR-FROBENIUS-Ungleichungen	5.
5. Aufgaben zum Normalformen-Satz	6.
6. Zur Geschichte des Normalformen-Satzes	
§ 7. Gleichungssysteme	89
1. Erinnerung an lineare Gleichungen	2.
2. Wiederholung von Problemen und Ergebnissen	3.
3. Der Fall $m = n$	4.
4. Anwendung des Normalformen-Satzes	
5. Lösungsverfahren	6.
6. Basiswechsel in Vektorräumen	
§ 8*. Pseudo-Inverse	94
1. Motivation	2.
2. Der Begriff des Pseudo-Inversen	3.
3. Ein Kriterium für Gleichungssysteme	4.
4. Zerlegung in eine direkte Summe	
<i>Kapitel 3. Determinanten</i>	98
§ 1. Erste Ergebnisse über Determinanten	98
1. Eine Motivation	2.
2. Determinanten-Funktionen	3.
3. Existenz	4.
4. Eigenschaften	
5. Anwendungen auf die Gruppe $GL(n; K)$	6.
6. Die CRAMERSche Regel	
§ 2. Das Inverse einer Matrix	106
1. Vorbemerkung	2.
2. Die Entwicklungs-Sätze	3.
3. Die komplementäre Matrix	
4. Beschreibung des Inversen	
§ 3. Existenzbeweise	109
1. Durch Induktion	2.
2. Permutationen	3.
3. Die LEIBNIZsche Formel	4.
4. Permutationsmatrizen	5.
5. Ein weiterer Existenzbeweis	
§ 4. Erste Anwendungen	112
1. Lineare Gleichungssysteme	2.
2. Zweidimensionale Geometrie	3.
3. Lineare Abhängigkeit	4.
4. Rangberechnung	5.
5. Die Determinanten-Rekursionsformel	
6. Das charakteristische Polynom	7*
7*. Mehrfache Nullstellen von Polynomen	
8*. Eine Funktionalgleichung	9.
9. Orientierung von Vektorräumen	

§ 5. Symmetrische Matrizen . . . . .	121
1. Einleitung 2. Der Vektorraum der symmetrischen Matrizen 3. Quadratische Ergänzung 4. Die JACOBISCHE Normalform 5. Normalformen-Satz 6*. Trägheits-Satz	
§ 6. Spezielle Matrizen . . . . .	126
1. Schiefsymmetrische Matrizen 2. Die VANDERMONDESche Determinante 3. Bandmatrizen 4. Aufgaben	
§ 7. Zur Geschichte der Determinanten . . . . .	128
1. Gottfried Wilhelm LEIBNIZ 2. BALTZER's Lehrbuch 3. Die weitere Entwicklung	

## Teil B. Analytische Geometrie

<i>Kapitel 4. Elementar-Geometrie in der Ebene</i> . . . . .	130
Der pythagoreische Lehrsatz . . . . .	130
§ 1. Grundlagen . . . . .	131
1. Skalarprodukt, Abstand und Winkel 2. Die Abbildung $x \rightarrow x^\perp$ 3. Geraden 4. Schnittpunkt zwischen zwei Geraden 5. Abstand zwischen Punkt und Gerade 6. Fläche eines Dreiecks 7. Der Höhenschnittpunkt	
§ 2. Die Gruppe $O(2)$ . . . . .	137
1. Drehungen und Spiegelungen 2. Orthogonale Matrizen 3. Bewegungen 4. Ein Beispiel 5. Die Hauptachsentransformation für $2 \times 2$ Matrizen 6. Fix-Geraden 7. Die beiden Orientierungen der Ebene	
§ 3. Geometrische Sätze . . . . .	141
1. Der Kreis 2. Tangente 3. Die beiden Sehnensätze 4. Der Umkreis eines Dreiecks 5. Die EULER-Gerade 6. Der FEUERBACH-Kreis 7. Das Mittendreieck	
<i>Kapitel 5. Euklidische Vektorräume</i> . . . . .	148
§ 1. Positiv definite Bilinearformen . . . . .	149
1. Symmetrische Bilinearformen 2. Beispiele 3. Positiv definite Bilinearformen 4. Positiv definite Matrizen 5. Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung 6. Normierte Vektorräume	
§ 2. Das Skalarprodukt . . . . .	155
1. Der Begriff eines euklidischen Vektorraumes 2. Winkelmessung 3. Orthonormalbasen 4. Basisdarstellung 5. Orthogonales Komplement und orthogonale Summe 6. Linearformen	
§ 3. Erste Anwendungen . . . . .	162
1. Positiv definite Matrizen 2. Die adjungierte Abbildung 3. Systeme linearer Gleichungen 4. Ein Kriterium für gleiche Orientierung 5*. LEGENDRE-Polynome	
§ 4. Geometrie in euklidischen Vektorräumen . . . . .	165
1. Geraden 2. Hyperebenen 3. Schnittpunkt von Gerade und Hyperebene 4. Abstand von einer Hyperebene 5*. Orthogonale Projektion 6*. Abstand zweier Unterräume 7*. Volumenberechnung 8*. Duale Basen	
§ 5. Die orthogonale Gruppe . . . . .	172
1. Bewegungen 2. Spiegelungen 3. Die Transitivität von $O(V, \sigma)$ auf Sphären 4*. Die Erzeugung von $O(V, \sigma)$ durch Spiegelungen 5*. Winkeltreue Abbildungen	
§ 6. Vermischte Aufgaben . . . . .	177

## X Inhaltsverzeichnis

<i>Kapitel 6. Der <math>\mathbb{R}^n</math> als Euklidischer Vektorraum . . . . .</i>	179
§ 1. Der $\mathbb{R}^n$ und die orthogonale Gruppe $O(n)$ . . . . .	179
1. Der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^n$ 2. Orthogonale Matrizen 3. Die Gruppe $O(n)$ 4. Spiegelungen 5. Erzeugung von $O(n)$ durch Spiegelungen 6*. Drehungen 7. Anwendung der Determinanten-Theorie 8*. Eine Parameterdarstellung 9. EULER, CAUCHY, JACOBI und CAYLEY	
§ 2. Die Hauptachsentransformation . . . . .	187
1. Problemstellung 2. Der Vektorraum der symmetrischen Matrizen 3. Positiv semi-definite Matrizen 4. Das Minimum einer quadratischen Form 5. Satz über die Hauptachsentransformation 6. Eigenwerte 7. Eigenräume	
§ 3. Anwendungen . . . . .	195
1. Vorbemerkung 2. Positiv definite Matrizen 3. Hyperflächen 2. Grades 4*. Der Quadratwurzel-Satz 5*. Polar-Zerlegung 6*. Orthogonale Normalform 7*. Das MOORE-PENROSE-Inverse	
§ 4*. Topologische Eigenschaften . . . . .	201
1. Zusammenhang 2. Kompaktheit 3. Hauptachsentransformation	
<i>Kapitel 7. Geometrie im dreidimensionalen Raum . . . . .</i>	204
§ 1. Das Vektorprodukt . . . . .	204
1. Definition und erste Eigenschaften 2. Zusammenhang mit Determinanten 3. Geometrische Deutung 4. Ebenen 5. Parallelotope 6. Vektorrechnung im Anschauungsraum	
§ 2*. Sphärische Geometrie . . . . .	210
1. Über den Ursprung der Sphärik 2. Das sphärische Dreieck 3. Das Polardreieck 4. Entfernung auf der Erde	
§ 3. Die Gruppe $O(3)$ . . . . .	214
1. Beschreibung durch das Vektorprodukt 2. Erzeugung durch Drehungen 3. Spiegelungen 4. Fix-Geraden 5. Die Normalform 6. Die Drehachse 7*. Die EULERSche Formel 8*. Drehungen um eine Achse	
§ 4. Bewegungen . . . . .	222
1. Fixpunkte 2. Bewegungen mit Fixpunkt 3. Schraubungen	

## Teil C. Lineare Algebra II

<i>Kapitel 8. Polynome und Matrizen . . . . .</i>	225
§ 1. Polynome . . . . .	225
1. Der Vektorraum $\text{Pol } K$ 2. $\text{Pol } K$ als Ring 3. Zerfallende Polynome 4. $\text{Pol } K$ als Hauptidealring 5*. Unbestimmte	
§ 2. Die komplexen Zahlen . . . . .	230
1. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen 2. Konjugation und Betrag 3. Der Fundamentalsatz der Algebra	
§ 3. Struktursatz für zerfallende Matrizen . . . . .	232
1. Der Begriff der Diagonalisierbarkeit 2. Das charakteristische Polynom 3. Äquivalenz-Satz für Eigenwerte 4. Nilpotente Matrizen 5. Idempotente Matrizen 6. Zerfallende Matrizen 7. Diagonalisierbarkeits-Kriterium 8*. Ein Beispiel zum Struktur-Satz 9*. Elementarsymmetrische Funktionen und Potenzsummen	

§ 4. Die Algebra $K[A]$ . . . . .	242
1. Eine Warnung 2. Matrix-Polynome 3. Das Minimalpolynom 4. Eigenwerte 5. Das Rechnen mit Kästchen-Diagonalmatrizen 6. Satz von CAYLEY 7. Äquivalenz-Satz für Diagonalisierbarkeit 8. Spektralscharen 9. Eigenräume	
§ 5. Die JORDAN-CHEVALLEY-Zerlegung. . . . .	251
1. Existenz-Satz 2. Summen von diagonalisierbaren Matrizen 3. Die Eindeutigkeit 4. Anwendungen	
§ 6. Normalformen reeller und komplexer Matrizen . . . . .	254
1. Normalformen komplexer Matrizen 2. Reelle und komplexe Matrizen 3*. Hermitesche Matrizen 4. Invariante Unterräume 5. Die Stufenform 6. Der Satz über die Stufenform 7. Orthogonale Matrizen 8. Schiefsymmetrische Matrizen 9*. Normale Matrizen	
§ 7*. Der höhere Standpunkt . . . . .	261
1. Einfache und halbeinfache Algebren 2. Kommutative Algebren 3. Die Struktursätze 4. Die weitere Entwicklung 5. Der generische Standpunkt	
<i>Kapitel 9. Homomorphismen von Vektorräumen</i> . . . . .	264
§ 1. Der Vektorraum $\text{Hom}(V, V')$ . . . . .	264
1. Der Vektorraum $\text{Abb}(M, V')$ 2. $\text{Hom}(V, V')$ als Unterraum von $\text{Abb}(V, V')$ 3. $\text{Mat}(m, n; K)$ als Beispiel 4. Verknüpfungen von $\text{Hom}(V, V')$ und $\text{Hom}(V', V'')$	
§ 2. Beschreibung der Homomorphismen im endlich-dimensionalen Fall . . . . .	266
1. Isomorphie mit Standard-Räumen 2. Darstellung der Homomorphismen 3. Basiswechsel 4. Die Algebra $\text{End } V$ 5. Diagonalisierbarkeit	
§ 3. Anwendungen . . . . .	269
1. Spiegelungen in euklidischen Vektorräumen 2. Die Linksmultiplikation in $\text{Mat}(n; K)$ 3. Polynome	
§ 4. Der Quotientenraum . . . . .	271
1. Einleitung 2. Nebenklassen 3. Der Satz über den Quotientenraum 4. Der Satz über den kanonischen Epimorphismus 5. Kanonische Faktorisierung 6. Anwendungen 7. Beispiele	
§ 5*. Nilpotente Endomorphismen . . . . .	274
1. Problemstellung 2. Zyklische Unterräume 3. Der Struktur-Satz 4. Nilzyklische Matrizen 5. Die Normalform	
<i>Literatur</i> . . . . .	277
<i>Namenverzeichnis</i> . . . . .	278
<i>Sachverzeichnis</i> . . . . .	280