L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Band VIII

L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Der Klassiker der gesamten Theoretischen Physik für den Studenten und Wissenschaftler.

Band 1:
Mechanik
unveränderter Nachdruck der 14., korrigierten Auflage 1997, 2011, 231 Seiten, 56 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5612-2

Band 2:
Klassische Feldtheorie
unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1992, 2014, 496 Seiten, 25 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5562-0

Band 3:
Quantenmechanik
unveränderter Nachdruck der 9. Auflage 1986, 2012, 660 Seiten, 57 Abbildungen, 11 Tabellen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5636-8

Band 4:
Quantenelektrodynamik
unveränderter Nachdruck der 7., berichtigten Auflage 1991, 2009, 628 Seiten, 25 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5632-0

Band 5:
Statistische Physik Teil 1
unveränderter Nachdruck der 8., berichtigten Auflage 1991, 2008, 535 Seiten, 78 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5654-2

Band 6:
Hydrodynamik
korrigierter Nachdruck der 5., überarbeiteten Auflage 1991, 2014, 705 Seiten, 136 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5554-5

Band 7:
Elastizitätstheorie
unveränderter Nachdruck der 7. Auflage 1991, 2010, 223 Seiten, 32 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5498-2

Band 8:
Elektrodynamik der Kontinua
unveränderter Nachdruck der 5., ergänzten Auflage 1990, 2014, 565 Seiten, 65 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5500-2

Band 9:
Statistische Physik Teil 2
4., berichtigte Auflage 1992, 404 Seiten, 18 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5656-6

Band 10:
Physikalische Kinetik
unveränderter Nachdruck der 2. Auflage 1990, 2012, 480 Seiten, 35 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5624-5

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:
L. D. Landau · E. M. Lifschitz, **Lehrbuch der Theoretischen Physik**
ISBN 978-3-8085-5588-0

Edition Harri Deutsch

L. D. Landau • E. M. Lifschitz

Elektrodynamik der Kontinua

Mit 65 Abbildungen und 2 Tabellen

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55002

Titel der Originalausgabe:
Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу
Электродинамика сплошных сред

Erschienen im Verlag NAUKA, Moskau 1982 (2., von E. M. Lifschitz und L. P. Pitajewski ergänzte und bearbeitete Auflage)

In deutscher Sprache herausgegeben von Prof. Dr. sc. Gerd Lehmann (Dresden), übersetzt aus dem Russischen von Dr. Georg Dautcourt (Berlin), Dipl.-Phys. Helmut Günther (Berlin), Dr. Horst Heino v. Borzeskowski (Berlin) und Dr. Stefan-Ludwig Drechsler (Dresden).

Unveränderter Nachdruck der 5., ergänzten Auflage 1990
Druck 5 4

ISBN 978-3-8085-5500-2

www.europa-lehrmittel.de
Umschlaggestaltung: Medienwerkstatt Dreimaster / www.3master.de, 63546 Hammersbach
Druck: Totem, 88–100 Inowroclaw, Poland

VORWORT DER HERAUSGEBER ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Der achte Band der zehnbändigen Lehrbuchreihe von L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHITZ enthält eine ungewöhnlich breite Skala von Anwendungen der Elektrodynamik. Abschnitte über Supraleiter, Magnetohydrodynamik, Streuung elektromagnetischer Wellen und Beugung von Röntgenstrahlen zum Beispiel findet man in ähnlichen Werken meist nicht.

Es überrascht immer wieder, daß die auf einer breiten physikalischen Grundlage aufbauenden Beispiele in diesem sich mit hoher Dynamik entwickelnden Gebiet ihre Aktualität in den 25 Jahren seit der ersten Auflage behalten haben. Der 4., deutschen Auflage liegt die 2., überarbeitete russische Auflage von 1982 zugrunde. In ihr wurden neue Ergebnisse insbesondere zur nichtlinearen Optik, zur Magnetohydrodynamik sowie zur räumlichen und zeitlichen Dispersion berücksichtigt. Hervorzuheben ist auch die gründliche Neufassung und Erweiterung des Kapitels über Ferro- und Antiferromagnetismus. Die Breite der aufgenommenen Gebiete und die vom Grundlegenden ausgehende Betrachtungsweise macht das Werk für Physiker, aber besonders auch für Vertreter angrenzender Disziplinen besonders wertvoll.

Wir gedenken voller Verehrung E. M. LIFSCHITZ, der uns bei der Vorbereitung der deutschen Ausgaben zu Lebzeiten stets freundlich unterstützte. Für die Übersetzung der 2., russischen Auflage und die Hilfe bei den Korrekturen sei Herrn Dr. S. L. DRECHSLER gedankt.

Dresden, im Mai 1990

P. ZIESCHE G. LEHMANN

VORWORT ZUR ZWEITEN RUSSISCHEN AUFLAGE

Für die erste Auflage wurde dieser Band vor 25 Jahren geschrieben. Natürlich machte ein derartig großer Zeitraum eine ziemlich erhebliche Überarbeitung und Ergänzung des Buches für die vorliegende zweite Auflage notwendig.

Die Auswahl des Stoffes wurde seinerzeit so getroffen, daß er bis zum heutigen Zeitpunkt (mit ganz unwesentlichen Ausnahmen) nicht veraltete. In dieser Hinsicht wurden lediglich verhältnismäßig geringfügige Ergänzungen und Verbesserungen angebracht.

Dagegen wurde eine wesentliche Ergänzung des Buches mit neuem Material erforderlich. Dies betrifft besonders die magnetischen Eigenschaften der Materie sowie die Theorie der optischen Erscheinungen; es wurden neue Kapitel über die räumliche Dispersion sowie über die nichtlineare Optik hinzugefügt.

Das Kapitel über die elektromagnetischen Fluktuationen wurde entfernt, da dieses Material nun in abgeänderter Form in einem anderen Band dieses Lehrbuches, dem Band IX, behandelt wird.

Eine unschätzbare Hilfe bei der Überarbeitung dieses Bandes sowie auch der anderen Bände waren die Hinweise unserer wissenschaftlichen Freunde und Kollegen, allzu vieler, um sie hier alle anzuführen. Besonders viele Hinweise gaben W. L. Ginsburg, B. J. Seldowitsch und W. P. Krainow. Sehr wertvoll war für uns die Möglichkeit, entstandene Fragen ständig mit A. F. Andrejew, I. J. Dsjaloschinski und I. M. Lifschitz erörtern zu können. Besonderer Dank gebührt S. I. Wainstejn und R. W. Polowin für die große Hilfe bei der Überarbeitung des Kapitels über die Magnetohydrodynamik.

Schließlich danken wir A. S. Borowik-Romanow, W. I. Grigorjew sowie M. I. Kaganow, die das Buch als Manuskript lasen und eine Reihe nützlicher Bemerkungen machten.

Moskau, Juli 1981

E. M. Lifschitz, L. P. Pitajewski

VORWORT ZUR ERSTEN RUSSISCHEN AUFLAGE

Der vorliegende Band des „Lehrbuches für Theoretische Physik“ beschäftigt sich mit der Theorie elektromagnetischer Felder in Substanzen und mit der Theorie makroskopischer elektrischer und magnetischer Erscheinungen der Stoffe. Wie man aus dem Inhaltsverzeichnis entnehmen kann, gehört hierzu ein sehr weiter Bereich von Fragen.

Beim Schreiben dieses Buches hatten wir viele Schwierigkeiten zu überwinden, die mit der Notwendigkeit zusammenhingen, eine Auswahl aus dem vorliegenden riesigen Material zu treffen, und auch damit, daß die gewöhnliche Darstellung vieler hier berührter Fragen nicht den nötigen Grad physikalischer Klarheit besitzt und teilweise sogar falsch ist. Wir sind uns darüber klar, daß auch in der vorliegenden Darstellung noch viele Mängel enthalten sind, die wir in weiteren Auflagen des Werkes richtigzustellen beabsichtigen.

Wir danken Prof. W. L. Ginsburg, der das Buch im Manuskript las und eine Reihe nützlicher Bemerkungen machte. Unser Dank gilt auch I. J. Dsjaloschinski und L. P. Pitajewski für ihre große Hilfe beim Lesen der Korrekturen.

Moskau, Oktober 1956

L. D. Landau, E. M. Lifschitz

INHALTSVERZEICHNIS

EINIGE BEZEICHNUNGEN

Elektrische Feldstärke und elektrische Induktion: $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{D}$.
Feldstärke und Induktion des Magnetfeldes: $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{B}$.
Äußere elektrische und magnetische Feldstärken: $\boldsymbol{\mathfrak{E}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{H}}$; Beträge $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$.
Dielektrische Polarisation: $\boldsymbol{P}$.
Magnetisierung: $\boldsymbol{M}$.
Integrales elektrisches und magnetisches Moment eines Körpers:
$\boldsymbol{\mathscr{P}}$ und $\boldsymbol{\mathscr{M}}$;
Beträge $\mathscr{P}$ und $\mathscr{M}$.
Dielektrische Permeabilität: ε.
Dielektrische Suszeptibilität: $\varkappa$.
Magnetische Permeabilität: μ.
Magnetische Suszeptibilität: χ.
Elektrische Stromdichte: $\boldsymbol{j}$.
Elektrische Leitfähigkeit: σ.
Absolute Temperatur: T.
Druck: P.
Volumen: V.
Dichten thermodynamischer Größen:
Entropiedichte S,
Dichte der inneren Energie U,
Dichte der freien Energie F,
Dichte des thermodynamischen Potentials Φ.
Die gleichen Größen für den Gesamtkörper: $\mathscr{S}$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$, φ.
Chemisches Potential: ζ.

Ein komplexer, zeitlich periodischer Faktor wird immer in der Gestalt $e^{-i\omega t}$ geschrieben.
Volumenelement: dV oder d^3x; Flächenelement: $d\boldsymbol{f}$.

Stets benutzt wird die Summationskonvention für zwei wiederholte vektorielle und tensorielle dreidimensionale (lateinische Buchstaben) und zweidimensionale (griechische Buchstaben) Indizes.

Die Zeichen $\approx$, $\sim$ bzw. $\propto$ bedeuten:
$\approx$ angenähert gleich
$\sim$ größenordnungsmäßig gleich
$\propto$ proportional

Die anderen Bände dieser Lehrbuchreihe werden wie folgt zitiert

I — Band I „Mechanik“
II — Band II „Klassische Feldtheorie“
III — Band III „Quantenmechanik“
IV — Band IV „Relativistische Quantentheorie“
V — Band V „Statistische Physik, Teil 1“
VI — Band VI „Hydrodynamik“
VII — Band VII „Elastizitätstheorie“
IX — Band IX „Statistische Physik, Teil 2“
X — Band X „Physikalische Kinetik“

I ELEKTROSTATIK VON LEITERN

§ 1. Das elektrostatische Feld von Leitern

Den Gegenstand der makroskopischen Elektrodynamik bildet das Studium von elektromagnetischen Feldern in stofferfüllten Räumen. Wie jede makroskopische Theorie hat es die Elektrodynamik mit physikalischen Größen zu tun, die über „physikalisch unendlich kleine Volumenelemente" gemittelt wurden, wobei die vom molekularen Bau der Stoffe herrührenden mikroskopischen Schwankungen nicht interessieren. So werden wir etwa statt des wahren mikroskopischen Wertes der Intensität des elektrischen Feldes $\boldsymbol{e}$ seinen durch

$$\bar{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{E} \tag{1,1}$$

bezeichneten Mittelwert betrachten.

Die Grundgleichungen der Elektrodynamik der Kontinua erhält man durch Mittelung der Gleichungen für das elektromagnetische Feld im Vakuum. Diesen Übergang von den mikroskopischen zu den makroskopischen Gleichungen führte als erster H. A. Lorentz (1902) durch.

Sowohl die Form der Gleichungen der makroskopischen Elektrodynamik als auch die Bedeutung der darin eingehenden Größen hängen von der physikalischen Natur des Mediums und von der Art der zeitlichen Änderung des Feldes ab. Es erscheint daher vernünftig, die Ableitung und Untersuchung dieser Gleichungen für jede Gruppe physikalischer Erscheinungen getrennt durchzuführen.

Wie bekannt, lassen sich alle Körper bezüglich ihrer elektrischen Eigenschaften in zwei Gruppen einteilen, in Leiter und Nichtleiter (Dielektrika), wobei sich Leiter von Nichtleitern dadurch unterscheiden, daß in ihnen jedes elektrische Feld eine Ladungsbewegung, einen elektrischen Strom hervorruft.[1]

Wir beginnen mit dem Studium zeitunabhängiger elektrischer Felder, die von geladenen Leitern hervorgerufen werden, also mit der Elektrostatik von Leitern. Aus der Grundeigenschaft der Leiter folgt vor allem, daß im elektrostatischen Fall das elektrische Feld im Innern des Leiters verschwinden muß. Ein nichtverschwindendes elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$ würde nämlich einen Strom hervorrufen; die Ausbreitung eines Stromes im Leiter ist jedoch mit der Dissipation von Energie verbunden und kann daher ohne äußere Energiequellen nicht als stationärer Zustand aufrechterhalten werden.

Umgekehrt folgt hieraus, daß sich alle Ladungen im Leiter auf seiner Oberfläche befinden müssen; Ladungen im Innern des Leiters würden dort notwendig ein elek-

---

[1]) Der Leiter wird hier als homogen (bezüglich seiner Zusammensetzung, seiner Temperatur usw.) angenommen. In inhomogenen Leitern können, wie wir später sehen werden, durchaus Felder existieren, die keine Ladungsbewegung hervorrufen.

trisches Feld hervorrufen;[1]) dagegen können Ladungen auf der Leiteroberfläche so verteilt sein, daß die von ihnen im Innern erzeugten Felder sich gegenseitig zu Null kompensieren.

Die Aufgabe der Elektrostatik der Leiter besteht also in der Bestimmung des elektrischen Feldes im Vakuum außerhalb des Leiters, und in der Bestimmung der Ladungsverteilung auf seiner Oberfläche.

In Punkten, die von der Oberfläche des Leiters hinreichend weit entfernt sind, fällt das mittlere Feld $\boldsymbol{E}$ im Vakuum praktisch mit dem wahren Feld $\boldsymbol{e}$ zusammen. Diese beiden Größen unterscheiden sich nur in unmittelbarer Nähe des Körpers voneinander, wo noch der Einfluß der irregulären molekularen Felder wirksam ist. Dieser Umstand hat jedoch keinen Einfluß auf die Gestalt der gemittelten Feldgleichungen. Die strengen mikroskopischen Feldgleichungen im Vakuum lauten:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{e} = 0\,, \tag{1,2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} \tag{1,3}$$

(mit $\boldsymbol{h}$ als mikroskopischer magnetischer Feldstärke). Da ein mittleres Magnetfeld als abwesend angenommen wird, verschwindet auch die Ableitung $\partial \boldsymbol{h}/\partial t$ im Ergebnis der Mittelung, und wir finden, daß das statische elektrische Feld im Vakuum den üblichen Gleichungen

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0\,, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0 \tag{1,4}$$

genügt, d. h. ein Potentialfeld darstellt, mit einem Potential φ, das mit $\boldsymbol{E}$ durch die Beziehung

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi \tag{1,5}$$

verbunden ist und die LAPLACE-Gleichung

$$\Delta\varphi = 0 \tag{1,6}$$

erfüllt.

Die Grundgleichungen für das Feld $\boldsymbol{E}$ auf der Oberfläche des Leiters folgen ebenfalls aus der Gleichung $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$, die (wie auch die Ausgangsgleichung (1,3)) sowohl außerhalb als auch im Innern des Körpers gültig ist. Wir legen in irgendeinem Oberflächenpunkt des Leiters die z-Achse in die Richtung seiner Oberflächennormalen $\boldsymbol{n}$. Die Feldkomponente E_z erreicht in unmittelbarer Nähe der Oberfläche sehr große Werte (da hier eine endliche Potentialdifferenz in einer sehr kleinen Entfernung besteht). Dieses intensive Feld ist eine Eigenschaft der Oberfläche selbst und hängt von ihren physikalischen Eigenschaften ab, hat aber keine Beziehung zu der von uns gestellten elektrostatischen Aufgabe, da es bereits auf Entfernungen zusammenbricht, die mit atomaren Dimensionen vergleichbar sind. Wesentlich ist, daß bei homogener Oberfläche die Ableitungen $\partial E_z/\partial x$, $\partial E_z/\partial y$ längs der Oberfläche endlich bleiben, obwohl $\partial E_z/\partial z$ selbst gegen Unendlich geht. Aus

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

folgt daher, daß auch $\partial E_y/\partial z$ endlich ist. Dies bedeutet, daß E_y stetig durch die Oberfläche geht (ein Sprung von E_y würde nämlich bedeuten, daß die Ableitung

[1]) Dies ist klar aus der später angegebenen Gleichung (1,8) ersichtlich.

$\partial E_y/\partial z$ gegen Unendlich strebt). Gleiches gilt auch für E_x, und da im Innern des Leiters allgemein $\boldsymbol{E} = 0$ gilt, ergibt sich, daß die Tangentialkomponenten des Außenfeldes verschwinden müssen:

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{t} = 0\,. \tag{1,7}$$

Das elektrostatische Feld steht also in jedem Oberflächenpunkt des Leiters senkrecht auf der Oberfläche. Wegen $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ bedeutet dies, daß das Potential des Feldes auf der gesamten Leiteroberfläche konstant sein muß, oder anders ausgedrückt, die Oberfläche eines homogenen Leiters stellt eine Äquipotentialfläche des elektrostatischen Feldes dar.

Die zur Oberfläche normale Feldkomponente hängt auf einfache Weise mit der Dichte der auf der Oberfläche verteilten Ladung zusammen. Man erhält diese Beziehung aus der allgemeinen elektrostatischen Gleichung $\operatorname{div}\boldsymbol{e} = 4\pi\varrho$, die nach Mittelung

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\bar{\varrho} \tag{1,8}$$

mit $\bar{\varrho}$ als mittlerer Ladungsdichte lautet. In Integralform besagt diese Gleichung bekanntlich, daß der Fluß des elektromagnetischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche gleich der mit 4π multiplizierten Gesamtladung ist, die sich im durch die Fläche eingeschlossenen Volumen befindet. Wenden wir diesen Satz auf ein Volumenelement an, das zwischen zwei infinitesimal benachbarten Einheitsflächenelementen eingeschlossen ist, und berücksichtigen wir, daß auf der Innenfläche $\boldsymbol{E} = 0$ gilt, so finden wir $E_\mathrm{n} = 4\pi\sigma$, wobei σ die Dichte der Oberflächenladung ist, d. h. der auf die Leitoberfläche bezogenen Ladung. Die Ladungsverteilung auf der Leiteroberfläche wird also durch die Formel

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_\mathrm{n} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n} \tag{1,9}$$

bestimmt (die Ableitung des Potentials ist in Richtung der äußeren Oberflächennormalen zu nehmen). Die Gesamtladung des Leiters ist

$$e = -\frac{1}{4\pi}\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}f\,, \tag{1,10}$$

das Integral erstreckt sich über seine gesamte Oberfläche.

Die Potentialverteilung in jedem elektrostatischen Feld besitzt folgende bemerkenswerte Eigenschaft: Die Funktion $\varphi(x, y, z)$ kann ihre Maxima und Minima nur an den Grenzen des vom Feld eingenommenen Bereiches annehmen. Diese Aussage läßt sich auch als Satz über die Unmöglichkeit eines stabilen Gleichgewichts für eine in das Feld gebrachte Probeladung e formulieren, weil es dann keinen Punkt gibt, in dem die potentielle Energie $e\varphi$ der Ladung ein Minimum hätte.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Nehmen wir etwa an, daß in irgendeinem Punkt A (der kein Grenzpunkt des Feldbereiches ist) das Potential ein Maximum besitzt. Dann läßt sich A stets mit einer solchen kleinen geschlossenen Oberfläche umgeben, daß für alle Normalableitungen $\partial\varphi/\partial n < 0$ gilt. Auch für das Integral über diese Oberfläche ist $\oint(\partial\varphi/\partial n)\,\mathrm{d}f < 0$. Aus der LAPLACE-Gleichung folgt aber

$$\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}f = \int\Delta\varphi\,\mathrm{d}V = 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

§ 2. Energie des elektrostatischen Feldes von Leitern

Wir berechnen die Gesamtenergie $\mathcal{U}$ des elektrostatischen Feldes geladener Leiter[1])

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi}\int E^2 \, \mathrm{d}V\,, \tag{2,1}$$

hierbei ist das Integral über das gesamte Raumgebiet außerhalb des Leiters zu erstrecken. Das Integral schreiben wir wie folgt um:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{8\pi}\int \boldsymbol{E}\,\mathrm{grad}\,\varphi \cdot \mathrm{d}V = -\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{div}\,(\varphi \boldsymbol{E})\,\mathrm{d}V + \frac{1}{8\pi}\int \varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V\,.$$

Das zweite Integral verschwindet wegen (1,4), während sich das erste in Integrale über die das Feld begrenzenden Leiterflächen und über eine unendlich ferne Fläche umwandeln läßt. Das letzte dieser beiden Integrale verschwindet, da das Feld hinreichend stark im Unendlichen abfällt (dabei wird angenommen, daß die willkürliche Konstante in φ so gewählt wurde, daß im Unendlichen $\varphi = 0$ gilt). Versehen wir die Leiter mit Indizes a und bezeichnen wir den konstanten Wert des Potentials auf jedem Leiter mit φ_a, so erhalten wir[2])

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi}\sum_a \oint \varphi E_\mathrm{n}\,\mathrm{d}f = \frac{1}{8\pi}\sum_a \varphi_a \oint E_\mathrm{n}\,\mathrm{d}f\,.$$

Führen wir schließlich gemäß (1,10) die Gesamtladung e_a der Leiter ein, so ergibt sich der endgültige Ausdruck

$$\mathcal{U} = \tfrac{1}{2}\sum_a e_a\varphi_a\,, \tag{2,2}$$

analog zum Ausdruck für die Energie eines Systems von Punktladungen.

Ladungen und Potential der Leiter können nicht gleichzeitig willkürlich gewählt werden; zwischen ihnen besteht ein bestimmter Zusammenhang. Infolge der Linearität und Homogenität der Feldgleichungen im Vakuum muß dieser Zusammenhang ebenfalls linear sein, sich also durch eine Relation der Form

$$e_a = \sum_b C_{ab}\varphi_b \tag{2,3}$$

ausdrücken lassen, worin die Größen C_{aa}, C_{ab} die Dimension einer Länge besitzen und von der Form und gegenseitigen Lage der Leiter abhängen. Die Größen C_{aa} heißen *Kapazitätskoeffizienten,* die C_{ab} $(a \neq b)$ *elektrostatische Induktionskoeffizienten.* Für nur einen vorhandenen Leiter gilt $e = C\varphi$, wobei C die Kapazität ist; sie fällt größenordnungsmäßig mit der linearen Dimension des Körpers zusammen. Umgekehrt läßt sich das Potential durch die Ladung gemäß

$$\varphi_a = \sum_b C^{-1}_{ab} e_b \tag{2,4}$$

---

[1]) Das Quadrat $\boldsymbol{E}^2$ fällt nicht mit dem mittleren Quadrat $\overline{\boldsymbol{e}^2}$ des tatsächlichen Feldes in der Nähe der Oberfläche des Leiters oder in ihm (wo $E = 0$, aber natürlich $\overline{\boldsymbol{e}^2} \neq 0$ gilt) zusammen. Bei der Berechnung des Integrals (2,1) vernachlässigen wir die uns hier nicht interessierende innere Energie des Leiters und die Affinität der Ladungen zur Oberfläche.

[2]) Bei der Umwandlung eines Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral ist hier und später im Auge zu behalten, daß E_n die Feldkomponente in Richtung der äußeren Normalen des Leiters ist. Diese Richtung ist entgegengesetzt zur äußeren Normalen des mit dem Raum außerhalb des Leiters identischen Integrationsbereiches. Das Vorzeichen des Integrals ist daher bei der Umwandlung geändert worden.

ausdrücken, wo die Koeffizienten C_{ab}^{-1} eine zu der Koeffizientenmatrix C_{ab} reziproke Matrix bilden.

Wir wollen nun die Änderung in der Energie eines Systems von Leitern berechnen, die durch eine unendlich kleine Änderung ihrer Ladungen oder Potentiale bewirkt wird. Variieren wir die Ausgangsbeziehung (2,1), so haben wir

$$\delta \mathcal{U} = \frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{E}\, \delta \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}V .$$

Dieser Ausdruck kann nach zwei äquivalenten Methoden weiterbehandelt werden. Setzen wir $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ und beachten wir, daß das variierte Feld ebenso wie das Ausgangsfeld die Gleichung (1,4) erfüllt (so daß $\operatorname{div} \delta\boldsymbol{E} = 0$ ist), so können wir

$$\delta \mathcal{U} = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{grad} \varphi \cdot \delta \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}V = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} (\varphi\, \delta \boldsymbol{E})\, \mathrm{d}V$$
$$= \frac{1}{4\pi} \sum_a \varphi_a \oint \delta E_{\mathrm{n}} \mathrm{d}f$$

schreiben oder schließlich

$$\delta \mathcal{U} = \sum_a \varphi_a\, \delta e_a , \tag{2,5}$$

d. h., wir erhalten die Änderung der Energie ausgedrückt durch die Variationen der Ladungen. Dieses Ergebnis ist verständlich, da es die Arbeit darstellt, die nötig ist, um die infinitesimalen Ladungen aus dem Unendlichen, wo das Potential verschwindet, auf die verschiedenen Leiter zu bringen.

Andererseits können wir auch

$$\delta \mathcal{U} = -\frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{E} \operatorname{grad} \delta\varphi \cdot \mathrm{d}V = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} (\boldsymbol{E}\, \delta\varphi)\, \mathrm{d}V$$
$$= \frac{1}{4\pi} \sum_a \delta\varphi_a \oint E_{\mathrm{n}}\, \mathrm{d}f$$

schreiben oder

$$\delta \mathcal{U} = \sum_a e_a\, \delta\varphi_a , \tag{2,6}$$

d. h. die Energieänderung ausgedrückt durch die Änderung in den Potentialen der Leiter.

Die Gleichungen (2,5), (2,6) zeigen, daß man durch Ableitung der Energie $\mathcal{U}$ nach den Ladungen die Potentiale der Leiter erhält, und daß die Ableitung von $\mathcal{U}$ nach den Potentialen die Ladungen ergibt:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial e_a} = \varphi_a , \qquad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi_a} = e_a . \tag{2,7}$$

Potentiale und Ladungen sind aber lineare Funktionen voneinander. Mit (2,3) haben wir

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi_a\, \partial \varphi_b} = \frac{\partial e_b}{\partial \varphi_a} = C_{ba} ,$$

und bei Vertauschen der Differentiationsreihenfolge würden wir C_{ab} erhalten. Man sieht daraus, daß

$$C_{ab} = C_{ba} \tag{2,8}$$

gilt (und analog $C_{ab}^{-1} = C_{ba}^{-1}$). Die Energie $\mathcal{U}$ kann als quadratische Form in den Potentialen oder Ladungen dargestellt werden:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C_{ab}\varphi_a\varphi_b = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C_{ab}^{-1} e_a e_b \,. \tag{2,9}$$

Diese quadratische Form muß wie der Ausgangsausdruck (2,1) positiv definit sein. Aus dieser Forderung ergeben sich bestimmte Ungleichungen, die die Koeffizienten C_{ab} erfüllen müssen. Insbesondere sind alle Kapazitätskoeffizienten positiv:

$$C_{aa} > 0 \tag{2,10}$$

(ebenso gilt $C_{aa}^{-1} > 0$).[1]

Die Koeffizienten der elektrostatischen Induktion sind dagegen negativ:

$$C_{ab} < 0 \quad (a \neq b)\,. \tag{2,11}$$

Dieser Umstand ergibt sich bereits aus folgenden einfachen Überlegungen. Nehmen wir an, daß alle Leiter mit Ausnahme des a-ten geerdet sind, d. h., daß ihre Potentiale verschwinden. Dann ist die durch den geladenen a-ten Leiter auf irgendeinem anderen Leiter b induzierte Ladung gleich $e_b = C_{ba}\varphi_a$. Das Vorzeichen der induzierten Ladung ist umgekehrt zu dem des induzierten Potentials, somit gilt $C_{ab} < 0$. Davon kann man sich leicht überzeugen, indem man davon ausgeht, daß das Potential eines elektrostatischen Feldes seine Maxima und Minima nicht außerhalb der Leiter annehmen kann. Es sei etwa das Potential φ_a des einzigen nichtgeerdeten Leiters positiv. Dann ist das Potential auch im ganzen Raum positiv, und sein kleinster Wert (Null) kann nur auf den geerdeten Leitern erreicht werden. Daraus folgt, daß auf den Oberflächen der geerdeten Leiter die Normalableitung des Potentials $\partial\varphi/\partial n$ positiv ist und die Ladung gemäß (1,10) negativ.

Durch ähnliche Überlegungen kann man auch $C_{ab}^{-1} > 0$ einsehen.

Die Energie des elektrostatischen Feldes von Leitern hat eine bestimmte Extremaleigenschaft, die jedoch von mehr formalem als physikalischem Charakter ist. Um sie abzuleiten, nehmen wir an, daß die Ladungsverteilung auf den Leitern eine infinitesimale Änderung erleidet (die Gesamtladung eines jeden Leiters jedoch konstant bleibt), bei der die Ladungen in den Leiter eindringen können; dabei kümmern wir uns nicht darum, daß in Wirklichkeit eine solche Ladungsverteilung nicht stationär aufrecht erhalten werden kann. Wir betrachten die entsprechende Änderung des Integrales

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi}\int E^2 \,\mathrm{d}V\,,$$

das nun über den ganzen Raum zu erstrecken ist, einschließlich der Leitervolumina selbst (da nach der Ladungsverschiebung das Feld $\boldsymbol{E}$ auch im Innern der Leiter von

---

[1]) Für positive Definitheit der Form (2,9) ist ferner die Ungleichung

$$C_{aa}\,C_{bb} > C_{ab}^2$$

nötig.