HANSER

Leseprobe

Frank Gustrau

Hochfrequenztechnik

Grundlagen der mobilen Kommunikationstechnik

ISBN (Buch): 978-3-446-43245-1

ISBN (E-Book): 978-3-446-43399-1

2 Elektromagnetische Felder und Wellen

In diesem Kapitel werden zunächst die elektromagnetischen Feldgrößen vorgestellt, wie sie für den statischen – also zeitunabhängigen – Fall definiert sind. Es wird der Zusammenhang zwischen den Feldgrößen und den Netzwerkgrößen wie Strom und Spannung verdeutlicht. Die Maxwellschen Gleichungen in Verbindung mit den Stetigkeitsbedingungen dienen dann der vollständigen Beschreibung des elektromagnetischen Verhaltens für zeit- und ortsvariante Feldgrößen. Schließlich werden einige wichtige Lösungen der Maxwellschen Gleichungen besprochen, die in nachfolgenden Kapiteln für das Verständnis der hochfrequenztechnischen Eigenschaften notwendig sind.

Detaillierte Darstellungen zum Thema der elektromagnetischen Feldtheorie sind in gut verständlicher Form unter anderem in folgenden Büchern zu finden: [Bala89] [Blum88] [Flei08] [Ida07] [Kark12] [Krau99] [Leuc95] [Schw02].

2.1 Physikalische und mathematische Grundlagen

Im Folgenden rekapitulieren wir grundlegende feldtheoretische und mathematische Zusammenhänge, um eine erste anschauliche Vorstellung des elektrischen und magnetischen Feldes zu gewinnen.

2.1.1 Elektrostatische Feldgrößen

Wir beginnen mit den elektrischen Feldgrößen für den zeitunabhängigen (statischen) Fall und erklären die Bedeutung der Netzwerkgrößen Spannung und Kapazität.

2.1.1.1 Elektrische Feldstärke und Spannung

Historisch hat man schon früh die Bedeutung von elektrischen *Ladungen* erkannt und festgestellt, dass sich Ladungen durch ihre Kraftwirkungen aufeinander auszeichnen. Man unterscheidet *positive* und *negative* Ladungen, wobei sich gleichnamige Ladungen abstoßen und ungleichnamige Ladungen anziehen.

Der Betrag der *Coulomb*-Kraft $\vec{F}_C$ zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2, die sich im Abstand r zueinander befinden, kann mit nachfolgender Gleichung berechnet werden.

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{2.1}$$

Die Dielektrizitätskonstante ε_0 besitzt den Wert $8,854 \cdot 10^{-12}$ As/(Vm). Die Richtung der Kraft ergibt sich auf einer gedachten Verbindungsgeraden zwischen den Punktladungen, wobei die Kräfte bei ungleichnamigen Ladungen aufeinander zu zeigen und bei gleichnamigen Ladungen voneinander weg zeigen (Bild 2.1). Falls mehr als zwei Landungen vorhanden sind, so können paarweise die Kräfte ermittelt und nach dem *Superpositionsprinzip* vektoriell überlagert werden.

Ladungen sind naturgemäß gequantelt und kommen nur in ganzzahligen Vielfachen der *Elementarladung* $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C vor. Diese Quantelung spielt aber makroskopisch – also bei Vorhandensein einer ausreichend großen Anzahl von Ladungsträgern – keine Rolle, so dass wir im Folgenden von einer kontinuierlichen Ladungsmenge ausgehen wollen.

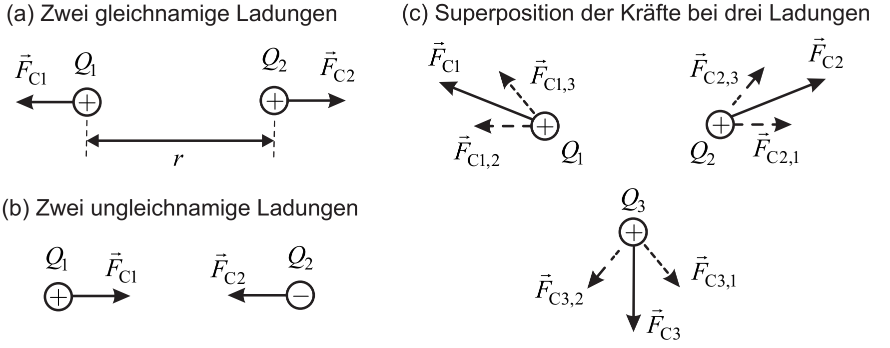

Bild 2.1 Coulomb-Kraft zwischen (a) zwei gleichnamigen Ladungen, (b) zwei ungleichnamigen Ladungen und (c) drei Ladungen

Bei den bislang betrachteten Ladungen handelte es sich um Punktladungen, bei denen die Ladungsmenge in einem singulären Raumpunkt angenommen wird. Bei kontinuierlich im Raum verteilten Ladungen verwendet man zur Beschreibung die *Raumladungsdichte* ϱ (Einheit $[\varrho] = \mathrm{C/m^3}$). Die Gesamtladung Q erhalten wir dann durch die Integration über das ladungserfüllte Volumen V.

$$Q = \iiint\limits_V \varrho \, \mathrm{d}v \tag{2.2}$$

Im Folgenden wollen wir uns vom Begriff der Kraft lösen, indem wir eine neue physikalische Größe einführen. Hierzu beziehen wir die auf die Ladung Q_2 wirkende Kraft auf die Ladung Q_2 selbst. Wir erhalten damit die *elektrische Feldstärke* $\vec{E}_1$ der Ladung Q_1 am Ort der Ladung Q_2.

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_2}{Q_2} \tag{2.3}$$

Die elektrische Feldstärke gibt also die Richtung der Kraftwirkung auf eine Probeladung Q_2 an, die sich in der Nähe einer Ladung Q_1 befindet. Obgleich hier rechentechnisch nur eine Quotientenbildung vorgenommen und damit eine von Q_2 unabhängige Größe geschaffen wird, bedeutet die neue Größe doch mehr als die Normierung einer Kraft.

Mathematisch wird die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ nun als ein *Vektorfeld* interpretiert, welches jedem Raumpunkt einen Vektor zuweist. Das elektrische Feld $\vec{E}_1$ einer Punktladung Q_1 im Ursprung ist damit in Kugelkoordinaten durch folgende Gleichung gegeben:

$$\vec{E}_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \vec{e}_r \quad . \tag{2.4}$$

Ein solches Vektorfeld kann durch sogenannte *Feldlinienbilder* anschaulich dargestellt werden. Bild 2.2 zeigt Feldlinienbilder unterschiedlicher Ladungsverteilungen. Den Feldlinienbildern kann so anschaulich die Richtung und der Betrag entnommen werden: Die vektorielle Größe $\vec{E}$ ist dabei immer tangential zu den Feldlinien gerichtet und die Liniendichte deutet die Amplitude der Feldstärke an.

Wenn man sich den Verlauf der Feldlinien und damit die Richtung der Kraftwirkung auf eine positive Ladung in den Bildern ansieht, so fällt auf, dass diese immer von den positiven Ladungen weg- und zu den negativen Ladungen hinführen. Man könnte auch sagen, dass die positiven Ladungen die *Quellen* des elektrostatischen Feldes darstellen (hier entspringen die Feldlinien) und dass die negativen Ladungen die *Senken* sind (hier enden die elektrischen Feldlinien).

Die Feldlinien des elektrostatischen Vektorfeldes besitzen Anfang und Ende. Ein Vektorfeld, welches Quellen entspringt und in Senken endet, bezeichnet man als *Quellenfeld*.

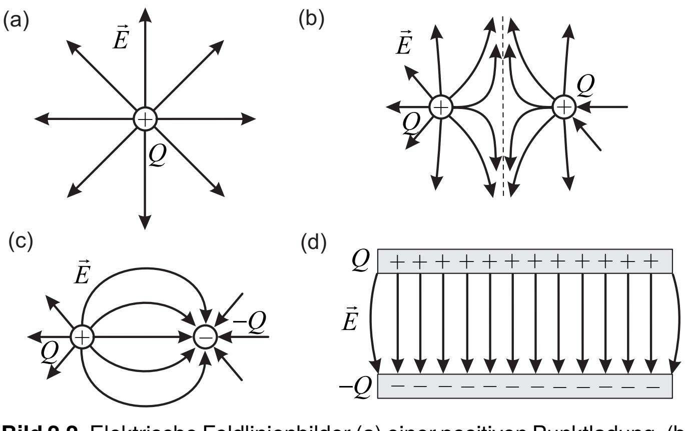

Bild 2.2 Elektrische Feldlinienbilder (a) einer positiven Punktladung, (b) zwischen zwei gleichnamigen Ladungen, (c) zwischen zwei ungleichnamigen Ladungen und (d) in einer Plattenkondensatoranordnung

Bewegen wir eine Ladung Q_2 nun im Feld einer anderen Ladung Q_1, so geschieht diese Bewegung unter Einfluss einer Kraft. Die Physik lehrt uns, dass hierbei *Arbeit* verrichtet wird. Für den Fall der Verschiebung einer Ladung vom Punkt $\vec{r}_\mathrm{A}$ zum Punkt $\vec{r}_\mathrm{B}$ kann die Arbeit $W_{\vec{r}_\mathrm{A}\vec{r}_\mathrm{B}}$

berechnet werden.

$$W_{\vec{r}_A\vec{r}_B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} Q_2\vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q_2 \underbrace{\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{s}}_{U} = Q_2 U \tag{2.5}$$

Zwischen der Kraft $\vec{F}$ und dem Wegelement $\mathrm{d}\vec{s}$ steht das Skalarprodukt, so dass also stets nur der Kraftanteil in Richtung des Weges einen Betrag liefert. In Gleichung (2.5) kann die konstante Ladung Q_2 aus dem Integral gezogen werden. Das Linienintegral über die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ liefert nun ein neue Größe, die wir als *Spannung* bezeichnen.

$$U = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{2.6}$$

Die Spannung U ist im Gegensatz zur elektrischen Feldstärke E nun *keine Feldgröße* mehr, denn die Spannung ist zwischen zwei Punkten definiert und nicht an einem Raumpunkt.

Man kann nun aber in Anlehnung an den Spannungsbegriff eine neue Feldgröße definieren, indem man den Anfang oder den Endpunkt des Integrals als Referenzpunkt festhält. Dies führt zum Begriff des *elektrostatischen Potentials* ϕ. Das Potential ϕ bezogen auf den Referenzpunkt $\vec{r}_0$ können wir mit Hilfe folgender Gleichung schreiben:

$$\phi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \quad . \tag{2.7}$$

Das Potential stellt ein *Skalarfeld* dar, welches jedem Raumpunkt einen skalaren Potentialwert zuweist. Das Potential entspricht damit im statischen Fall der Spannung zwischen dem Raumpunkt $\vec{r}$ und dem Referenzpunkt $\vec{r}_0$.

Im Falle elektrostatischer Felder kann aus dem Potential auch direkt wieder die elektrische Feldstärke berechnet werden. Wir benötigen hierzu die Gradientfunktion, die sich in kartesischen Koordinaten als Summe der partiellen Ableitungen in die drei kartesischen Raumrichtungen schreiben lässt.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi = -\nabla\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z\right) \tag{2.8}$$

Die Gradientfunktion überführt das skalare Potentialfeld in ein Vektorfeld. Der Vektor $\operatorname{grad}\phi$ zeigt dabei in jedem Raumpunkt stets in Richtung der *größten Änderung* der Potentialfunktion. Aus diesem Grund wird die Gradientfunktion auch bei Optimierungen verwendet, denn auf der Suche nach einem Maximum oder Minimum kommt man in der Regel am schnellsten voran, wenn man sich in einer Richtung bewegt, in der die Funktionswerte sich besonders rasch ändern.

Interessant ist, dass es im Prinzip unendlich viele Potentialfelder gibt, da der Referenzpunkt $\vec{r}_0$ frei wählbar ist. Eine Verschiebung des Referenzpunktes verändert den Integrationsweg und hebt damit das Potential insgesamt an oder senkt es ab, führt also zu einer additiven Konstante. Das elektrische Feld E ist aber durch seine Kraftwirkung auf Ladungen definiert und damit stets *eindeutig*. Bei der Gradientfunktion werden nun nur Ableitungen des Potentials berücksichtigt, so dass eine additive Konstante der Potentialfunktion keine Auswirkung auf das elektrische Feld hat.

2.1.1.2 Polarisation und relative Dielektrizitätszahl

Bislang haben wir Ladungen im freien Raum betrachtet. Kommen nun aber Materialien hinzu, so ist die Definition von weiteren Größen hilfreich. Betrachten wir gemäß Bild 2.3 einen Plattenkondensator, auf dessen Platten sich die Ladungsmengen $+Q$ und $-Q$ befinden. Zwischen den Platten bildet sich ein homogenes Feld $\vec{E}_0$ aus und wir können die Spannung U_0 bestimmen. Bringen wir nun ein Isoliermaterial (*Dielektrikum*) in den Plattenkondensator, so zeigt sich, dass die neue Spannung U_M zwischen den Platten gegenüber dem Fall ohne Isoliermaterial verringert ist. Entfernen wir das Isoliermaterial wieder, so erhalten wir den ursprünglichen Spannungswert U_0.

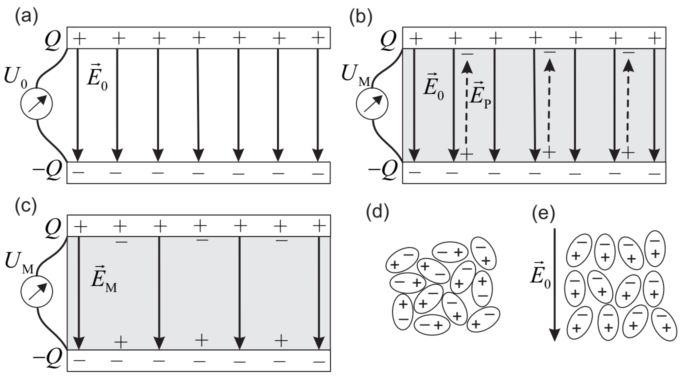

Bild 2.3 Zum Verständnis der Polarisation: (a) luftgefüllter Plattenkondensator, (b) dielektrisches Material im Kondensator (Entstehung eines Gegenfeldes), (c) dielektrisches Material im Kondensator (reduziertes elektrisches Feld im Dielektrikum), (d) ungeordnete polarisierte Teilchen im Dielektrikum, (e) Orientierung von polarisierten Teilchen im Dielektrikum unter Einfluss eines äußeren elektrischen Feldes

Durch Einbringen des Isolators in das elektrische Feld $\vec{E}_0$ richten sich polarisierte Teilchen im Isolators in Feldrichtung aus. Im Inneren gleichen sich nun die Ladungen jeweils wieder aus, an der Oberfläche ergibt sich jedoch eine resultierende Oberflächenladungsverteilung. Durch diese Ladungen entsteht im Dielektrikum ein Gegenfeld $\vec{E}_\mathrm{P}$, welches sich dem ursprünglichen äußeren Feld $\vec{E}_0$ überlagert. In der Materie herrscht ein abgeschwächtes Feld $\vec{E}_\mathrm{M}$ mit dem Betrag

$$E_\mathrm{M} = E_0 - E_\mathrm{P} \quad . \tag{2.9}$$

Dieser Effekt wird als *Polarisation*[1] bezeichnet. Wie gut Materie polarisierbar ist, hängt vom inneren Aufbau ab. Wie oben gezeigt tritt der Effekt bei polarer Materie auf. Er ist aber ebenso bei

[1] Unglücklicherweise wird im Zusammenhang mit Wellen ebenfalls der Begriff der Polarisation verwendet, der dort aber eine ganz andere Bedeutung hat. Wir kommen darauf in Abschnitt 2.5.2 zu sprechen.

nicht polarer Materie zu beobachten. Stellen wir uns hierzu ein einfaches Modell eines unpolaren Teilchens vor: Um einen positiven Kern liegt eine negativ geladene Elektronenhülle; die Ladungsschwerpunkte von Kern und Elektronenhülle fallen dabei zusammen. Nach außen ist das Teilchen elektrisch neutral. Unter dem Einfluss eines äußeren Feldes wirken auf Kern und Hülle Kräfte in unterschiedlicher Richtung. Die Ladungsschwerpunkte wandern auseinander und es entsteht ein polares Teilchen.

Kehren wir zu unserem Gedankenexperiment mit dem Plattenkondensator zurück: Bei Füllung des Plattenkondensators mit dem Dielektrikum ergibt sich durch die verringerte elektrische Feldstärke im Medium eine reduzierte Spannung U_{M}.

$$U_{\mathrm{M}} = \int\limits_{\text{Untere Platte}}^{\text{Obere Platte}} \vec{E}_M \cdot \mathrm{d}\vec{s} < U_0 \tag{2.10}$$

Am Anfang des Abschnitts haben wir beschlossen, uns nur mit makroskopischen Vorgängen zu beschäftigen, bei denen wir die Quantelung der Ladung vernachlässigen können und kontinuierliche Verteilungen annehmen. Nun beruht die vorherige anschauliche Interpretation der Polarisation auf mikroskopischen Überlegungen und ist somit wenig hilfreich, wenn wir den Effekt der Polarisation mathematisch einfach in einem makroskopischen Modell beschreiben wollen. Zur makroskopischen Beschreibung verwenden wir den Quotient zwischen der ursprünglichen und der reduzierten Spannung bzw. Feldstärke. Diese neue Größe nennen wir *relative Dielektrizitätszahl* ε_{r}.

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \frac{E_0}{E_{\mathrm{M}}} = \frac{U_0}{U_{\mathrm{M}}} \tag{2.11}$$

Die relative Dielektrizitätszahl ε_{r} ist eine dimensionslose Größe und für die meisten Materialien durch einen einfachen Zahlenwert größer als eins gegeben. Tabelle 2.1 listet relative Dielektrizitätszahlen für technisch wichtige Dielektrika auf. In der Praxis werden für erste Abschätzungen in der Regel idealisierte Materialien verwendet. Statt Luft und anderer Gase kann häufig vereinfachend von *Vakuum* ausgegangen werden.

Falls Materialien eine Richtungsabhängigkeit (Anisotropie) aufweisen, also für unterschiedliche Orientierungen des Materials im Kondensator sich verschiedene Spannungen ergeben, so erfolgt die Beschreibung durch eine Matrix.

2.1.1.3 Verhalten bei Wechselstrom

Bei Anlegen einer Wechselspannung wechselt die Ladung auf den Kondensatorplatten periodisch die Polarität. Die polaren Teilchen im Dielektrikum ändern daher mit der gleichen Frequenz ihre Lage. Mit zunehmender Frequenz sind die Teilchen nicht mehr in der Lage dem anregenden Feld $\vec{E}_0$ zu folgen. Die *feldschwächende Wirkung* lässt nach, so dass mit steigender Frequenz im Allgemeinen mit einem Abfall der relativen Dielektrizitätszahl gerechnet werden muss. Die Frequenzabhängigkeit $\varepsilon_{\mathrm{r}}(\omega)$ vieler Materialien kann mathematisch über sog. Debye-Beziehungen beschrieben werden [Detl12]. Hierin gehen die statische relative Dielektrizitätszahl $\varepsilon_{\mathrm{r}}(0)$ sowie der Grenzwert für sehr hohe Frequenzen $\varepsilon_{\mathrm{r}}(\infty)$ und eine materialcharakteristische Größe (Relaxationszeit) ein. Viele technisch wichtige Dielektrika haben in ihrem technisch wichtigen Einsatzfrequenzbereich allerdings hinreichend konstante relative Dielektrizitätszahlen (Tabelle 2.1).

Tabelle 2.1 Relative Dielektrizitätszahl ε_r und Verlustfaktor $\tan\delta_\varepsilon$ wichtiger Isolationsmaterialien (im jeweils technisch wichtigen Frequenzbereich)

Material	ε_r	$\tan\delta_\varepsilon$	Typische Anwendung
Vakuum, Luft	1	0	Füllmaterial bei Präzisionsleitungen
Polytetraflourethylen (PTFE)	2,1	0,0002	Kabelisolationsmaterial
Glasfaserverstärktes Epoxidharz (FR4)	3,6 – 4,5	0,02	Substrat für planare Schaltungen
Aluminiumoxid (Al_2O_3)	9,8	0,0001	Substrat für planare Schaltungen
Galliumarsenid (GaAs)	12,5	0,0004	Integrierte Mikrowellenschaltungen

Mit der bei Wechselspannungen auftretenden ständigen Umorientierung der Teilchen sind Wärmeverluste verbunden. Wie wir in Abschnitt 2.2.4 noch genauer sehen werden, wird dieser Verlustmechanismus mit einem Verlustfaktor $\tan\delta_\varepsilon$ beschrieben. Aus Gründen der besseren Auffindbarkeit in späteren Kapiteln sind die Verlustfaktoren bereits an dieser Stelle in Tabelle 2.1 mit enthalten [Mein92] [Goli08].

2.1.1.4 Dielektrische Verschiebungsdichte

Eine weitere wichtige Größe zur Beschreibung elektrischer Felder ist die *dielektrische Verschiebungsdichte* $\vec{D}$, die auch als *elektrische Flussdichte* bezeichnet wird. Bei ihrer Definition taucht die zuvor eingeführte relative Dielektrizitätszahl wieder auf.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \tag{2.12}$$

Im Vakuum ist die dielektrische Verschiebungsdichte bis auf den konstanten Faktor ε_0 gleich der elektrischen Feldstärke. In Materialien kommt noch die relative Dielektrizitätszahl ε_r hinzu. Die Bedeutung dieser neuen Größe $\vec{D}$ erkennen wir, wenn wir einen Blick auf die physikalische Einheit werfen: $[D] = \mathrm{C/m^2}$, also Ladung pro Fläche.

Integriert man die dielektrische Verschiebungsdichte über eine Fläche A, so erhält man den durch diese Fläche gehenden *elektrischen Fluss* Ψ_e.

$$\Psi_e = \iint\limits_A \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \tag{2.13}$$

Auf die Bedeutung des elektrischen Flusses kommen wir noch einmal im Zusammenhang mit den Maxwellschen Gleichungen in Integralform (Abschnitt 2.2.3) zurück. Dort erhalten wir auch eine anschauliche Interpretation.

2.1.1.5 Elektrische Feldenergie und Kapazität

Unter Verwendung der bislang eingeführten elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und der dielektrischen Verschiebungsdichte $\vec{D}$ können wir jedem Raumpunkt eine *elektrische Energiedichte* w_e zuweisen. Ist das felderfüllte Medium linear (d.h. die Materialgröße ε_r ist für große wie kleine Werte der elektrischen Feldstärke E gleich) und isotrop (d.h. richtungsunabhängig), so gilt:

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r \left|\vec{E}\right|^2 \quad . \tag{2.14}$$

Die Gesamtenergie W_e in einem Volumen V kann durch Integration über dieses Volumen bestimmt werden.

$$W_e = \iiint_V w_e \,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{D}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\iiint_V \varepsilon_0\varepsilon_r \left|\vec{E}\right|^2 \mathrm{d}v \tag{2.15}$$

Die gespeicherte elektrische Energie ist in der Netzwerktheorie von besonderer Bedeutung, da sie eng mit dem Begriff der *Kapazität* verknüpft ist. Betrachten wir einen Plattenkondensator mit der Kapazität C und der Spannung U zwischen den Platten, so besteht der folgende Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldenergie im felderfüllten Bereich des Kondensators und der Kapazität:

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \varepsilon_0\varepsilon_r \left|\vec{E}\right|^2 \mathrm{d}v = \frac{1}{2}CU^2 \quad . \tag{2.16}$$

Ein Kondensator speichert elektrische Energie. Die Kapazität C ist – bei gegebener Spannung U – ein Maß für die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie.

Die Kapazität ist eine wichtige Größe, wenn es darum geht, die Fähigkeit der Ladungsspeicherung auszudrücken.

$$C = \frac{Q}{U} \tag{2.17}$$

Für einen mit einem Dielektrikum (ε_r) gefüllten Plattenkondensator mit der Plattenfläche A und dem Plattenabstand d gilt näherungsweise der einfache Zusammenhang:

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{A}{d} \quad \text{(Plattenkondensator).} \tag{2.18}$$

2.1.2 Stationäre elektrische Strömungsfelder und magnetische Felder

Wir erweitern unsere Betrachtung auf bewegte Ladungen und gelangen so zu magnetischen Feldgrößen. Auch hier beschränken wir uns zunächst auf den zeitunabhängigen (statischen) Fall und erklären die Bedeutung der Netzwerkgrößen Stromstärke, Widerstand und Induktivität.

2.1.2.1 Stromdichte, Leistungsdichte und Widerstand

In den bisherigen Abschnitten haben wir ruhende Ladungen und die von ihnen erzeugten elektrischen Quellenfelder eingeführt. Nun untersuchen wir Ladungen, die ihre Lage im Raum ändern; wir werden sehen, dass es dann zur Entstehung von magnetischen Feldern kommt. Zunächst aber müssen wir wichtige Begriffe einführen, die die Bewegung von Ladungen beschreiben. Die *Stromstärke* I gibt die Ladungsmenge ΔQ an, die in einem Zeitintervall Δt durch eine Querschnittsfläche A fließt.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{2.19}$$

Die Stromstärke I ist dabei eine integrale Größe (es wird über eine Fläche integriert), die auch vorzeichenbehaftet ist. Die Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger gibt die positive Richtung der Stromstärke an. In einem elektrischen Leiter sind die negativ geladenen Elektronen frei beweglich, so dass sich die positive Richtung des Stromes hier entgegen der Bewegungsrichtung der Elektronen ergibt. Es können auch gleichzeitig positive und negative Ladungsträger zum Strom beitragen. Die Anteile addieren sich dann (Bild 2.4a).

Wollen wir die räumliche Verteilung des Stromflusses durch eine Feldgröße erfassen, so bietet sich die *elektrische Stromdichte* $\vec{J}$ an. Die Stromdichte $\vec{J}$ ist eine vektorielle Feldgröße, die die Bewegung der Ladungsträger im Raum beschreibt.

> Die Stromdichte $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$ ist eine *lokale Größe* (Vektorfeld) im Gegensatz zur Stromstärke I, die eine *integrale* Größe ist und immer in Beziehung zu einer Bezugsfläche A steht (Bild 2.4b).

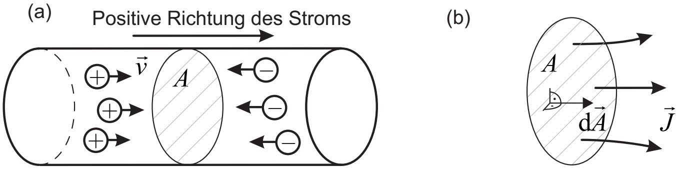

Bild 2.4 Stromstärke (a) beschrieben durch die Bewegung von Ladungsträgern und (b) in Abhängigkeit der elektrischen Stromdichte

Durch Integration der Stromdichte $\vec{J}$ über eine Fläche A erhält man die Stromstärke I.

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \tag{2.20}$$

Im leitfähigen Material ist die Stromdichte über die elektrische Leitfähigkeit mit der elektrischen Feldstärke verknüpft. Fließt durch einen idealen Leiter ($\sigma \to \infty$ S/m) ein Strom, so muss die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ verschwinden, damit die Stromdichte $\vec{J}$ *endlich* bleibt.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{2.21}$$

Bei endlicher Leitfähigkeit σ ergibt sich die Leistungsdichte p in jedem Raumpunkt als Produkt der elektrischen Stromdichte und der elektrischen Feldstärke.

$$p = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma \left|\vec{E}\right|^2 \tag{2.22}$$

Die in einem stromdurchflossenen Volumen V umgesetzte Verlustleistung P erhalten wir durch Integration über das Volumen.

$$P = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} \,\mathrm{d}v \tag{2.23}$$

Aus der Schaltungstheorie ist bekannt, dass in einem *Widerstand R* Verlustleistung umgesetzt wird.

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R \tag{2.24}$$