



Leseprobe

Rainer Ose

Elektrotechnik für Ingenieure

Grundlagen

ISBN (Buch): 978-3-446-43244-4

ISBN (E-Book): 978-3-446-43955-9

Weitere Informationen oder Bestellungen unter  
<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43244-4>  
sowie im Buchhandel.

### 3 Lineare elektrische Gleichstromkreise

#### 3.1 Eigenschaften elektrischer Stromkreise

Lineare elektrische Stromkreise bestehen aus Bauelementen mit einer linearen Strom-Spannungs-Kennlinie.

Jeder lineare elektrische Stromkreis kann in einen aktiven und einen passiven Teil getrennt werden (siehe Trennstelle A und B im Bild 3.1). Im aktiven Teil müssen sich alle Zweige mit Quellen befinden. Der passive Teil ist dann eine reine Verbraucheranordnung. Diese Trennung wird vorerst nur an zwei Punkten (*Zweipol*) eines elektrischen Stromkreises vorgenommen.

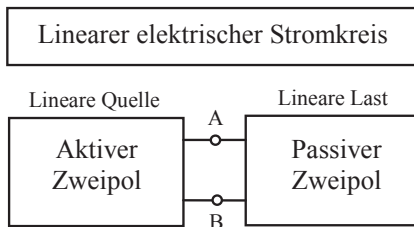
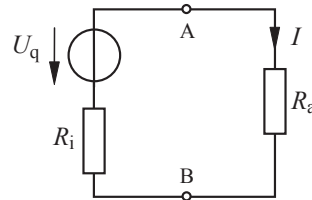


Bild 3.1: Allgemeines Modell eines elektrischen Stromkreises

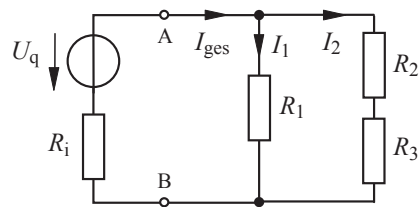
Ein elektrischer Stromkreis kann eine unverzweigte oder eine verzweigte Struktur aufweisen.

Im *unverzweigten Stromkreis* fließt nur ein Strom (*Reihenschaltung*). In seiner Grundstruktur besteht der unverzweigte Stromkreis lediglich aus einer realen (hier: linearen) Spannungsquelle [mit  $U_q$  und  $R_i$  – Bild 3.2 a), linke Seite] und einem (hier: linearen) Lastwiderstand  $R_a$  [Bild 3.2 a), rechte Seite]. Dieser *Grundstromkreis* wird häufig als Ersatzschaltung für einen linearen elektrischen Stromkreis verwendet.

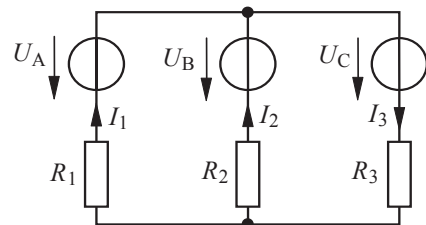
Ein *verzweigter Stromkreis* ist dadurch gekennzeichnet, dass mindestens drei Ströme fließen [Bild 3.2 b)]. Ein Vergleich der Bilder 3.2 a) und b) zeigt, dass in einem elektrischen Stromkreis mit zwei echten Knoten mehr als zwei Ströme fließen müssen.



a) Unverzweigter Stromkreis (Grundstromkreis)



b) Verzweigter Stromkreis



c) Elektrisches Netzwerk

Bild 3.2: Elektrische Gleichstromkreise

Der verzweigte Stromkreis kann die Struktur einer *Parallelschaltung* oder einer *gemischten Schaltung* aufweisen. In den folgenden Ausführungen wird unter einer gemischten Schaltung eine beliebige schaltungstechnische Kombination von *Elementarschaltungen* [Reihen- und Parallelschaltungen von Verbrauchern – siehe Bild 3.2 b), rechte Seite] verstanden.

Der Begriff des *elektrischen Netzwerkes* [Bild 3.2 c)] wird für verzweigte elektrische Stromkreise verwendet, die über mehrere Quellen verfügen, die in verschiedenen Zweigen positioniert sind.

Ein beliebiger elektrischer Stromkreis besteht aus  $z$  Zweigen, die durch  $k$  Knotenpunkte miteinander verbunden sind. In einem Zweig fließt immer nur ein Strom (Zweigstrom). Für die weiteren Betrachtungen gilt folgende Festlegung:

♦ Ein Zweig wird als „echter“ Zweig bezeichnet, wenn mindestens ein Zweig-Bauelement vorhanden ist (Zweig 1, 2 und 3 im Bild 3.3). Ansonsten ist es ein Kurzschlusszweig (Verbindung C – C\*).

♦ Ein Knotenpunkt wird als „echter“ Knotenpunkt bezeichnet, wenn er von allen seinen Nachbarknoten durch einen echten Zweig getrennt ist (Knotenpunkte A, B und C  $\equiv$  C\* im Bild 3.3).

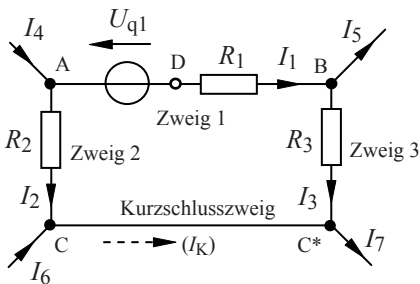


Bild 3.3: Auszug aus einem elektrischen Stromkreis

Trennt man einen echten Knoten (z.B. zum Zwecke einer übersichtlicheren schaltungstechnischen Darstellung) in zwei Teile, die durch einen Kurzschluss verbunden werden (siehe Kurzschlusszweig im Bild 3.3), so entstehen zwei unechte Knotenpunkte.

In echten und in unechten Knotenpunkten kommt es zu einer Aufteilung von Strömen. In einem verzweigten elektrischen Stromkreis mit einer Quelle teilt sich der Gesamt-

strom nach dem Knotenpunktsatz in mehrere Teilströme auf.

Für das Beispiel im Bild 3.2 b) gilt:

$$I_{\text{ges}} = I_1 + I_2$$

Für eine eindeutige Zuordnung der Ströme (und natürlich auch der Spannungen) ist neben der Angabe der Zählpfeile auch eine sinnvolle Indizierung erforderlich. Diese Kennzeichnung wird in den weiteren Ausführungen nach Vorbild des Bauelementes vorgenommen, durch das der jeweilige Strom fließt (bzw. über dem die jeweilige Spannung abfällt). Für  $R_1$  im Bild 3.3 gilt dann:  $U_1 (\rightarrow) = I_1 \cdot R_1$ . Der in einer Rechnung gesetzte Zählpfeil ( $\rightarrow$ ) soll bei Platzproblemen den in der Schaltung nicht mehr positionierbaren Zählpfeil ersetzen.

Durch Auszählen der echten Zweige kann die Anzahl der Ströme in einem elektrischen Stromkreis ermittelt werden. Sollte im Ergebnis der Berechnung ein Kurzschlussstrom interessant sein, kann er aus den anderen Zweigströmen berechnet werden. Für Bild 3.3 würde dann gelten:

$$I_2 + I_6 = (I_K) = I_7 - I_3$$

Für bestimmte Betrachtungen ist die Einführung eines virtuellen Knotens sinnvoll. Er bewirkt keine Stromteilung (siehe Knoten D im Bild 3.3) und dient lediglich als Messpunkt oder als Punkt einer Trennstelle.

Die folgenden Abschnitte sind so gegliedert, dass zunächst die passiven Zweipole betrachtet werden (Abschn. 3.2 und 3.3). Daran schließen sich Ausführungen zu den aktiven Zweipolen (Abschn. 3.4) an. Im Abschn. 3.5 wird schließlich das Zusammenwirken von aktivem und passivem Zweipol diskutiert.

Die Analyse und die Berechnung linearer elektrischer Netzwerke sind in ausführlicher Form Gegenstand des Kapitels 5.

## 3.2 Regeln zur Berechnung passiver Zweipole

### 3.2.1 Reihenschaltung und Spannungsteilerregel

Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist eine aus zwei Widerständen bestehende Reihenschaltung. Eine Reihenschaltung ist dadurch gekennzeichnet, dass durch alle betrachteten Elemente derselbe Strom  $I$  fließt (Bild 3.4).

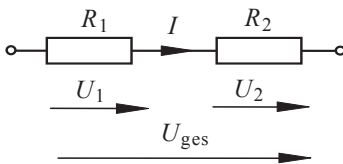


Bild 3.4: Reihenschaltung

Die Gesamtspannung wird mit dem Maschensatz [Gleich. (2.4)] aus der Summe der beiden Teilspannungen berechnet:

$$U_{ges} = U_1 + U_2$$

Mit dem OHMSchen Gesetz [Gleich. (2.1)] findet man so eine Berechnungsvorschrift zur Bestimmung des Gesamtwiderstandes  $R_{ges}$  einer Reihenschaltung.

$$I \cdot R_{ges} = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = I \cdot (R_1 + R_2)$$

$$R_{ges} = R_1 + R_2$$

Ordnet man  $n$  Widerstände in einer Reihenschaltung an, so ergibt sich der Gesamtwiderstand aus der Summe der einzelnen Widerstände. Es gilt allgemein:

$$R_{ges} = \sum_{v=1}^n R_v \quad (3.1)$$

In einer Reihenschaltung teilt sich die Gesamtspannung in einzelne Teilspannungen

auf. Dieser Teilung liegt eine Gesetzmäßigkeit zu Grunde, die aus der Reihenschaltung von zwei Widerständen abgeleitet wird (vgl. Bild 3.4). Der Strom in dieser Schaltung kann über drei verschiedene Ansätze berechnet werden:

$$I = \frac{U_1}{R_1}; \quad I = \frac{U_2}{R_2}; \quad I = \frac{U_{ges}}{R_{ges}}$$

Da dieser Strom überall gleich ist, darf man die rechten Seiten dieser Gleichungen auch gleichsetzen. Dann gilt:

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_{ges}}{R_{ges}} = \frac{U_{ges}}{R_1 + R_2} \quad (3.2)$$

Bringt man nun noch die Spannungen auf die linke und die Widerstände auf die rechte Seite, so erhält man die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (3.3)$$

$$\frac{U_1}{U_{ges}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (3.4)$$

$$\frac{U_2}{U_{ges}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.5)$$

Die diesen Gleichungen zu Grunde liegende Gesetzmäßigkeit wird als *Spannungsteilerregel* bezeichnet.

In einer Reihenschaltung verhalten sich zwei Spannungen so zueinander wie die Widerstände, über denen diese Spannungen abfallen.

Bei der Anwendung dieser Regel ist Folgendes zu beachten:

- Die Spannungsteilerregel darf nur in einer Reihenschaltung angewendet werden.

Gemischte Schaltungen sind demzufolge erst in eine Reihenschaltung umzurechnen. Dann fließt nur noch ein Strom und man erhält einen Ansatz gemäß Gleich. (3.2).

- Parallelwiderstände zur jeweils betrachteten Reihenschaltung haben keinen Einfluss auf die aktuelle Spannungsteilung.

### Lehrbeispiel 3.1:

Berechnen Sie für die angegebene Schaltung den Spannungsabfall  $U_2 = f(U_{\text{ges}}, R_1, R_2, R_3)$ .

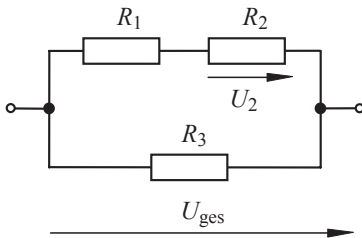


Bild 3.5: Schaltung zum Lehrbeispiel 3.1

Die Spannungsteilerregel darf nur in der Reihenschaltung  $R_1$  und  $R_2$  angewendet werden. Der Widerstand  $R_3$  ist ein Parallelwiderstand, der nicht an der Spannungsteilung beteiligt ist.

$$\text{Es gilt: } U_2 = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

### 3.2.2 Parallelschaltung und Stromteilerregel

Eine Parallelschaltung ist dadurch gekennzeichnet, dass über allen Elementen dieselbe Spannung  $U$  liegt (Bild 3.6).

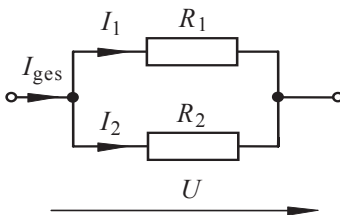


Bild 3.6: Parallelschaltung

Mit dem Knotenpunktsatz [Gleich. (2.5)] kann eine Berechnungsvorschrift für den Gesamtwiderstand einer (vorerst aus zwei Widerständen bestehenden) Parallelschaltung abgeleitet werden.

$$I_{\text{ges}} = I_1 + I_2$$

$$\frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

In einer Parallelschaltung erhält man den Gesamtleitwert durch Addition der einzelnen Leitwerte. Die Bildung des Kehrwertes führt zum Gesamtwiderstand:

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Für  $n$  parallele Widerstände gilt dann:

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{R_v}} \quad (3.6)$$

In gemischten Schaltungen (schaltungstechnische Kombination aus Reihen- und Parallelschaltungen) hat man häufig zwei parallele Widerstände zu berechnen. Um das Rechnen mit Leitwerten zu vermeiden (Widerstandswerte haben für den Schaltungstechniker infolge des Bezuges zum realen Bauelement einen weitaus höheren Informationsgehalt als Leitwerte), gilt im Weiteren folgende Vereinfachung für zwei parallel (//) geschaltete Widerstände:

$$R_{\text{ges}} = R_1 // R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}}$$

$$R_{\text{ges}} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.7)$$

In der schaltungstechnischen Praxis findet man auch gelegentlich den Fall, dass zwei parallel geschaltete Widerstände gleich groß sind. Für  $R_1 = R_2 = R$  gilt:

$$R_{\text{ges}} = R // R = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R^2}{2 \cdot R} = \frac{R}{2}$$

Zwei gleich große Widerstände wirken in einer Parallelschaltung wie die Hälfte eines Einzelwiderstandes.

Schaltet man einen relativ großen Widerstand (z.B.:  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ) zu einem kleinen Widerstand ( $R_1 = 10 \text{ }\Omega$ ) parallel, so wird der Gesamtwiderstand vom kleineren Widerstandswert bestimmt ( $R_{\text{ges}} \approx 9,9 \text{ }\Omega$ ).

Der Gesamtwiderstand einer Parallelschaltung ist immer kleiner als der kleinste Widerstandswert der Parallelschaltung.

Unterscheiden sich beide Widerstandswerte um den Faktor 100 oder mehr, so kann als Näherung für den Gesamtwiderstand der kleinere Widerstandswert angenommen werden. Diese Überlegungen sind insbesondere auch als Probe für die Richtigkeit der rechnerisch ermittelten Größenordnung eines Gesamtwiderstandes geeignet.

In einer Parallelschaltung teilt sich der Gesamtstrom nach dem Knotenpunktsatz [Gleich. (2.5)] in einzelne Teilströme auf. Dieser Teilung liegt eine Gesetzmäßigkeit zu Grunde, die aus der Parallelschaltung von zwei Widerständen abgeleitet werden soll (vgl. Bild 3.6). Die Spannung ist über allen Elementen gleich und kann über drei verschiedene Ansätze berechnet werden:

$$U = I_1 \cdot R_1; \quad U = I_2 \cdot R_2; \quad U = I_{\text{ges}} \cdot R_{\text{ges}}$$

Wenn die linken Seiten dieser Gleichungen gleich sind, müssen die rechten Seiten auch gleich sein. Dann gilt:

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2 = I_{\text{ges}} \cdot R_{\text{ges}} \quad (3.8)$$

Bringt man nun noch die Ströme auf die linke und die Widerstände auf die rechte Seite, so erhält man die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (3.9)$$

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1} \quad (3.10)$$

$$\frac{I_2}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_2} \quad (3.11)$$

Die diesen Gleichungen zu Grunde liegende Gesetzmäßigkeit wird als *Stromteilerregel* bezeichnet.

In einer Parallelschaltung verhalten sich zwei Ströme zueinander wie die Kehrwerte der Widerstände, durch die diese Ströme fließen.

- Die Stromteilerregel darf nur in einer Parallelschaltung angewendet werden. Gemischte Schaltungen muss man erst in eine Parallelschaltung umrechnen. Nur dann liegt über allen Elementen die gleiche Spannung, und man erhält einen Ansatz gemäß Gleich. (3.8).

- Reihenwiderstände zum jeweils betrachteten Knotenpunkt haben nichts mit der aktuellen Stromteilung zu tun.

In vielen Aufgabenstellungen ist ein beliebiger Teilstrom zu berechnen. Da der Gesamtstrom über das OHMSche Gesetz ein-

fach bestimmt werden kann, ist der Ansatz  $\frac{\text{Teilstrom}}{\text{Gesamtstrom}}$  von besonderem Interesse.

Zur Herleitung der dieser Teilung zu Grunde liegenden Gesetzmäßigkeit wird von Gleich. (3.10) ausgegangen (vgl. Bild 3.6).

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1} = \frac{R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2) \cdot R_1}$$

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.12)$$

Ein Teilstrom verhält sich zum Gesamtstrom wie der nicht von diesem Teilstrom durchflossene Widerstand, dividiert durch die Summe der beiden an der Stromteilung beteiligten Widerstände.

Die Anwendung dieser vereinfachten Form der Stromteilerregel setzt voraus, dass jede gemischte Schaltung zuerst in eine aus zwei Widerständen bestehende Parallelschaltung umgerechnet wird.

### Lehrbeispiel 3.2:

Berechnen Sie den Strom  $I_2$  mit der Stromteilerregel. Geg.:  $I_{\text{ges}}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$

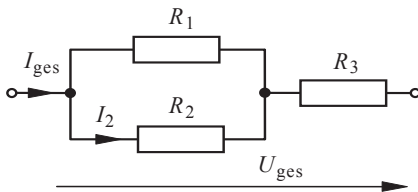


Bild 3.7: Schaltung zum Lehrbeispiel 3.2

$R_3$  ist nicht an der Stromteilung beteiligt. Er begrenzt vielmehr den Gesamtstrom.

Es gilt: 
$$I_2 = I_{\text{ges}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

## 3.3 Berechnung passiver Zweipole

Die im Abschn. 3.2 dargestellten Regeln zur Berechnung passiver Zweipole sollen nun auf schaltungstechnische Konfigurationen angewendet werden, in denen eine Spannung und/oder ein Strom mehrfach geteilt werden. Bild 3.8 zeigt einen passiven Zweipol, in dem die Gesamtspannung  $U_{AB} = U_1$  in die Spannungen  $U_2$  (nicht eingezeichnet) und  $U_3$  geteilt wird.  $U_5$  entsteht dann aus einer weiteren Teilung der Spannung  $U_3$  und ist somit das Ergebnis einer doppelten Spannungsteilung. Der Gesamtstrom wird im Knoten D in die Teilströme  $I_1$  und  $I_2$  geteilt. Der Strom  $I_3$  entsteht durch eine weitere Stromteilung im Knoten E aus  $I_2$  und ist somit das Ergebnis einer doppelten Stromteilung.

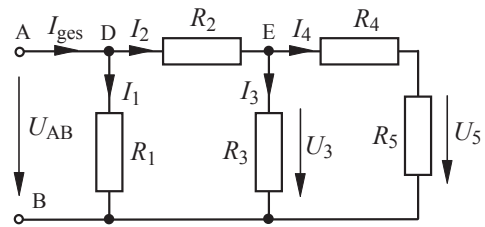


Bild 3.8: Doppelter Spannungs- und Stromteiler

Zur Berechnung der Spannung  $U_5$  oder des Stromes  $I_3$  müssen die Teilerregeln doppelt angewendet werden. Es gilt:

$$\frac{U_5}{U_{AB}} = \frac{U_5}{U_3} \cdot \frac{U_3}{U_{AB}} \quad \text{bzw.:} \quad \frac{I_3}{I_{\text{ges}}} = \frac{I_3}{I_2} \cdot \frac{I_2}{I_{\text{ges}}}$$

In beiden Fällen ist darauf zu achten, dass die Teilerregeln nur für Elementarschaltungen gelten. Die Schaltung muss demzufolge für jeden einzelnen Spannungsteiler in eine Reihenschaltung und für jeden einzelnen Stromteiler in eine Parallelschaltung umgerechnet werden (siehe nachfolgende BB).