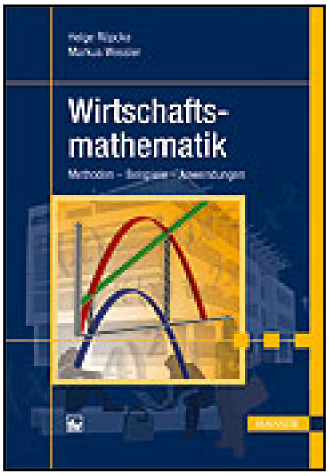
HANSER



Leseprobe

Helge Röpcke, Markus Wessler

Wirtschaftsmathematik

Methoden - Beispiele - Anwendungen

Herausgegeben von Robert Galata, Markus Wessler

ISBN (Buch): 978-3-446-43256-7

ISBN (E-Book): 978-3-446-43375-5

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43256-7

sowie im Buchhandel.

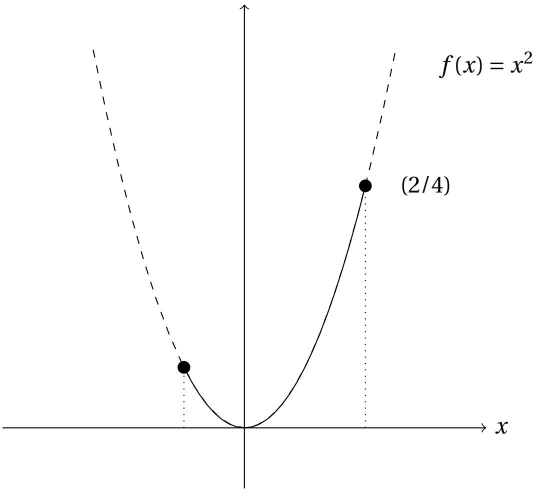


Bild 2.18 Nach Einschränkung des Definitionsbereichs auf das Intervall $[-1, 2]$ hat die Funktion $f(x) = x^2$ ein Maximum bei 2 mit dem Wert 4.

2.4.3 Globale Extrema

Dass man einen Überblick über die lokalen Extrema erhält, reicht häufig nicht aus. Gerade bei den ökonomischen Funktionen, deren Definitionsbereich naturgegeben eingeschränkt ist, können Extrema am Rand des Definitionsbereichs liegen, die man mit der lokalen Methode nicht erwischt. Nun ist dieser Rand sehr übersichtlich und besteht in der Regel, wenn man ein Intervall betrachtet, nur aus zwei Punkten. Die Funktion

$$f(x) = x^2$$

hat weder ein lokales noch ein globales Maximum, doch schränkt man den Definitionsbereich etwa auf das Intervall $[-1, 2]$ ein, wie das in *Bild 2.18* der Fall ist, liegt an der Randstelle $x_0 = 2$ das globale Maximum vor.

Wird in *Beispiel 2.15* der Definitionsbereich auf das Intervall $[1, 15]$ eingeschränkt, so sind auch hier noch die Randstellen zu überprüfen. Es ergibt sich

$$f(1) = 6\frac{10}{27} \quad \text{und} \quad f(15) = 24.$$

Daher ist (9/4) das globale Minimum und (15/24) das globale Maximum. Zu sehen ist diese Situation in *Bild 2.19*.

2.4.4 Wendepunkte

In den Abschnitt über die Optimierung gehören auch noch die Wendepunkte. Bei ihnen handelt es sich zwar nicht um optimale Punkte im Hinblick auf ihren Funktionswert, aber doch

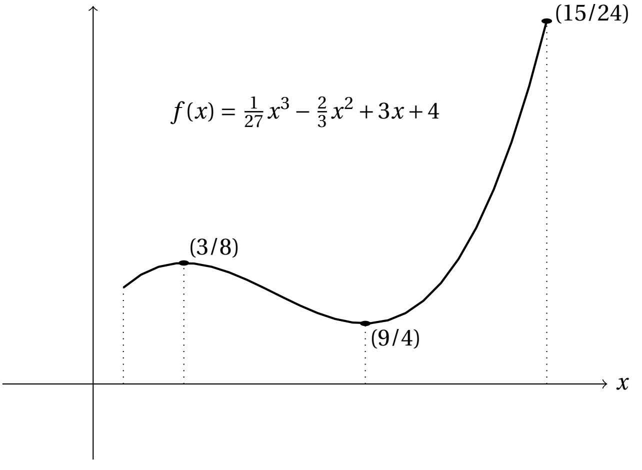


Bild 2.19 Die Funktion $f(x)$ aus *Beispiel 2.15* wird jetzt nur noch über dem Intervall $[1, 15]$ betrachtet. Der lokale Tiefpunkt $(9/4)$ ist nun auch globaler Tiefpunkt, weil es über dem Intervall keinen tieferen Punkt gibt. Der lokale Hochpunkt $(3/8)$ ist kein globaler, sondern das globale Maximum wird am rechten Rand im Punkt $(15/24)$ angenommen.

um Punkte, die in anderer Hinsicht optimal sind. Es war bereits vom Krümmungsverhalten die Rede, das mit der zweiten Ableitung, sofern sie existiert, genau untersucht werden kann. Punkte mit maximalem oder minimalem Funktionswert, die über die notwendige Bedingung der stationären Stellen identifiziert wurden, sind nur dann tatsächlich lokale Extrema, wenn die Krümmung des Graphen dort *keinen Vorzeichenwechsel* hat. Stellen, bei denen ein solcher Vorzeichenwechsel vorliegt, nennt man *Wendestellen* der Funktion und die zugehörigen Punkte *Wendepunkte*. Man spricht auch konkreter von einer Wendestelle mit Rechts-Links-Krümmungswechsel bzw. Links-Rechts-Krümmungswechsel.

In welcher Hinsicht sind Wendepunkte optimal? In einem Wendepunkt ist lokal die *Steigung des Funktionsgraphen minimal oder maximal.* Daher können bei einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ die Wendepunkte als die *lokalen Extrema von $f'(x)$* berechnet werden, was bei hinreichend oft differenzierbaren Funktionen wieder besonders leicht geht.

Bedingungen für einen Wendepunkt

Die Funktion f sei auf dem Intervall $I \subset D_f$ dreimal differenzierbar. Dann gilt für eine Stelle $x_0 \in I$:

1. *Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt:* Liegt bei x_0 eine Wendestelle von f vor, dann muss $f''(x_0) = 0$ gelten, also der Funktionsgraph in der Nähe von x_0 wie eine Gerade verlaufen.
2. *Hinreichende Bedingung für ein Extremum:* Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) < 0$ (bzw. $f'''(x_0) > 0$), dann liegt bei x_0 eine Wendestelle von f mit Links-Rechts-Krümmungswechsel (bzw. Rechts-Links-Krümmungswechsel) vor.

Sucht man etwa die Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 3x + 4$$

aus *Beispiel 2.15*, so berechnet man die Nullstelle der zweiten Ableitung. Es ergibt sich $x_W = 6$, und die dritte Ableitung $f'''(x) = \frac{2}{9}$ ist ohnehin überall positiv. Damit handelt es sich um eine Wendestelle mit Rechts-Links-Krümmungswechsel. Als Wendepunkt erhalten wir $W(6/6)$, denn $f(6) = 6$. Der Wendepunkt liegt damit genau auf halbem Wege zwischen den beiden lokalen Extrema. Diese Eigenschaft ist bei ganzrationalen Funktionen dritten Grades immer gegeben.

Beispiel 2.16

Gesucht sind Extrema und Wendestellen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 60x.$$

Die erste Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 24x + 60$ hat keine Nullstellen, was bedeutet, dass $f(x)$ keine lokalen Extrema hat. Der Graph von $f'(x)$ ist eine nach oben geöffnete Parabel ohne Nullstellen, also gilt überall $f'(x) > 0$. Daher ist $f(x)$ überall streng monoton wachsend, und es gibt auch keine globalen Extrema, sofern der Definitionsbereich nicht eingeschränkt wird. Wäre das der Fall, so würde aufgrund der strengen Monotonie am linken Rand das Minimum und am rechten Rand das Maximum angenommen.

Als Nullstelle der zweiten Ableitung erhalten wir $x_W = 4$, und Einsetzen in die dritte Ableitung liefert einen positiven Wert. Damit handelt es sich um eine Wendestelle mit Rechts-Links-Krümmungswechsel. Der zugehörige Wendepunkt hat die Koordinaten $(4/112)$. Man kann das Wachstum von $f(x)$ auch folgendermaßen beschreiben: degressiv bis $x_W = 4$, danach progressiv. ■

2.5 Anwendung der Differenzialrechnung auf ökonomische Funktionen

An manchen Stellen klangen bereits einige wichtige ökonomische Funktionen an, und nun endlich werden wir uns ihnen voll zuwenden und die volle Kraft der Differenzialrechnung ausnutzen.

Generell betrachten wir in diesem Abschnitt einen Produktionsprozess, bei dem ein homogenes Gut hergestellt wird, dessen Mengeneinheiten (ME) durch die Variable x gemessen werden.

2.5.1 Kostenfunktionen

Bei einem Produktionsprozess entstehen für den Unternehmer Kosten. Die *Gesamtkostenfunktion* oder kurz *Kostenfunktion*, die angibt, welche Kosten K, gemessen in Geldeinheiten (GE), bei einer Produktion von x Mengeneinheiten (ME) anfallen, bezeichnen wir stets mit $K(x)$. Die bei einer Nullproduktion dennoch anfallenden Kosten $K(0)$ nennt man die *Fixkosten*, und die Differenz $K_v(x) = K(x) - K_f(x)$, also die wirklich von x abhängigen Kosten, heißen die *variablen Kosten*. Als *Stückkostenfunktion* oder *Durchschnittskostenfunktion* bezeichnet man die Funktion

$$k(x) = \frac{K(x)}{x},$$

und entsprechend nennt man

$$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$$

die *variable Stückkostenfunktion* oder *variable Durchschnittskostenfunktion*. Schließlich nennt man die Ableitung $K'(x)$ die *Grenzkostenfunktion*.

Solche Kostenfunktionen, so unterschiedlich sie auch im Typ sein mögen, sollten alle die folgenden vernünftigen Eigenschaften erfüllen.

Eigenschaften von Kostenfunktionen

1. $K(x)$ ist nicht für negative Zahlen definiert, also gilt für den Definitionsbereich $D_K \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$.
2. Die Fixkosten sind nicht negativ, also $K(0) \geq 0$.
3. $K(x)$ ist überall auf D_K streng monoton steigend, hat also insbesondere keine lokalen Extrema.

Die einfachste Klasse von Kostenfunktionen sind sicher die *linearen Kostenfunktionen*.

Beispiel 2.17

Für eine lineare Kostenfunktion $K(x) = ax + b$ gilt:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Fixkosten:} & K(0) & = & b \\ \text{Variable Kosten:} & K_v(x) & = & ax \\ \text{Stückkosten:} & k(x) & = & a + \frac{b}{x} \\ \text{Variable Stückkosten:} & k_v(x) & = & a \\ \text{Grenzkosten:} & K'(x) & = & a \end{array} \tag{2.16}$$

■

Solche einfachen linearen Kostenfunktionen sind uns bereits an einigen Stellen begegnet, so etwa in *Beispiel 1.8*. Sie sind das einfachste Modell für eine Kostenfunktion und tatsächlich auch sehr häufig realistisch. *Beispiel 2.17* greift noch einmal auf, was wir uns an den entsprechenden Stellen schon klar gemacht haben: Die beiden Parameter a und b einer linearen Kostenfunktion können als variable Stückkosten bzw. als Fixkosten interpretiert werden. Darüber

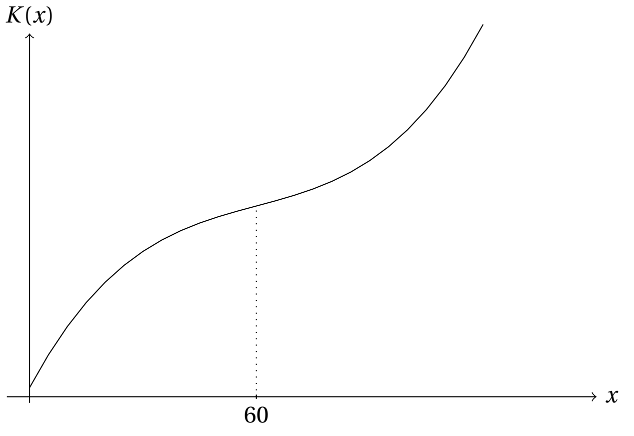


Bild 2.20 Der Graph der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion $K(x) = \frac{1}{60}x^3 - 3x^2 + 200x + 100$ mit Schwelle des Ertragsgesetzes bei $x_S = 60$. Das Kostenwachstum ist bis hierhin degressiv, danach progressiv.

hinaus sehen wir, dass die Stückkosten für sehr große Werte von x natürlich auch gegen a konvergieren, denn der Teil b/x, also der Anteil der Fixkosten pro produzierter Mengeneinheit, wird mit wachsendem x immer kleiner.

Es gibt andere Typen von Kostenfunktionen. Ein sehr wichtiger soll hier noch herausgegriffen werden, und zwar die *ertragsgesetzliche Kostenfunktion*. Eine solche Funktion besitzt zusätzlich zu den oben genannten Eigenschaften einen Wendepunkt S mit Rechts-Links-Krümmungswechsel. Die x-Koordinate x_S dieses Wendepunktes wird *Schwelle des Ertragsgesetzes* genannt. Die Schwelle des Ertragsgesetzes markiert damit die Produktionsmenge, bei der degressives in progressives Kostenwachstum umschlägt. Solche ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen werden praktisch immer durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{2.17}$$

realisiert.

Beispiel 2.18

Die Kostenfunktion

$$K(x) = \frac{1}{60}x^3 - 3x^2 + 200x + 100$$

ist ertragsgesetzlich. Ihr Funktionsgraph ist in *Bild 2.20* zu sehen. Die Schwelle des Ertragsgesetzes, also die Wendestelle, berechnet sich als die Nullstelle der zweiten Ableitung von $K(x)$. Es ergibt sich $x_S = 60$ mit zugehörigen Kosten in Höhe von 4.900 Geldeinheiten. ■

Die Tatsache, dass eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion einen Wendepunkt mit Rechts-Links-Krümmungswechsel besitzt, ist letztendlich das „Ertragsgesetz“ bei Kostenfunktionen und kann in der folgenden Form formuliert werden.

Ertragsgesetz für Kostenfunktionen

Bei einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion sind die Grenzkosten an der Schwelle des Ertragsgesetzes minimal.

Bei einem Wendepunkt mit Rechts-Links-Krümmungswechsel nämlich wird die Steigung des Funktionsgraphen immer kleiner, wenn man sich auf x_S zu bewegt. Dort ist sie dann minimal und wird anschließend wieder größer.

Bei einer ganzrationalen Funktion dritten Grades kann man übrigens mithilfe der Koeffizienten sehr schnell prüfen, ob sie ertragsgesetzlich ist. Geht man nämlich von der allgemeinen Form (2.17) aus, so darf die Ableitung

$$K'(x) = 3ax^2 - 2bx + c \tag{2.18}$$

keine Nullstellen haben. Denn schließlich soll durch $K(x)$ eine Kostenfunktion realisiert werden, und als solche darf sie keine lokalen Extrema haben, sondern muss streng monoton steigen. Würde man also versuchen, die Nullstellen von (2.18) mithilfe der Mitternachtsformel (1.26) zu berechnen, so müsste die dort vorkommende Diskriminante negativ sein, also

$$(2b)^2 - 4 \cdot (3a) \cdot c < 0. \tag{2.19}$$

Man erhält damit ein einfaches Kriterium für die Koeffizienten in (2.17).

Koeffizientenkriterium für ertragsgesetzliche Kostenfunktionen

Eine ganzrationale Kostenfunktion dritten Grades

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ist genau dann ertragsgesetzlich, wenn für die Koeffizienten folgende fünf Eigenschaften gelten:

- $a > 0$
- $b < 0$
- $c > 0$
- $d \geq 0$
- $b^2 < 3ac$

Die ersten vier Bedingungen folgen dabei aus den Tatsachen, dass $K(x)$ eine Wendestelle mit Rechts-Links-Krümmungswechsel besitzt und die Fixkosten nicht negativ sein dürfen. Die letzte Ungleichung folgt aus (2.19).

2.5.2 Absatz, Preis, Umsatz und Gewinn

Es wird im Folgenden angenommen, dass alle produzierten Mengeneinheiten auch abgesetzt werden können. Bezeichnet man dann mit p den *Preis pro Mengeneinheit*, für den der Produzent das Gut am Markt absetzen kann, so besteht zwischen x und p im Allgemeinen ein wichtiger Zusammenhang: Je mehr Mengeneinheiten x produziert und abgesetzt werden, umso kleiner wird der Preis p pro Mengeneinheit. Durch die *Preis-Absatz-Funktion* $p(x)$, die den

Preis pro Mengeneinheit bei einer produzierten Menge x angibt, wird dieser Zusammenhang funktional dargestellt. Typische Preis-Absatz-Funktionen sind entweder konstant (es wird also unabhängig von der insgesamt produzierten Menge immer der gleiche Preis verlangt) oder linear fallend. Die *Absatz-Preis-Funktion* $x(p)$ ist die Umkehrfunktion von $p(x)$.

Die *Umsatzfunktion*

$$U(x) = x \cdot p(x) \tag{2.20}$$

gibt den Umsatz des Produzenten bei einer abgesetzten Menge von x ME eines Gutes an. Man kann natürlich ebenso gut den Umsatz durch die Variable p ausdrücken, also

$$U(p) = p \cdot x(p). \tag{2.21}$$

Häufig wird die Umsatzfunktion auch *Erlösfunktion* genannt und entsprechend mit $E(x)$ bzw. $E(p)$ abgekürzt. Schließlich muss noch die *Gewinnfunktion* erwähnt werden, die sich als Differenz aus Umsatz und anfallenden Kosten ergibt:

$$G(x) = U(x) - K(x) \quad \text{oder} \quad G(p) = U(p) - K(p). \tag{2.22}$$

Beispiel 2.19

Bei einem Produktionsprozess sei die lineare Kostenfunktion $K(x) = 10x + 450$ gegeben, und es sei bekannt, dass die produzierte Ware zu einem konstanten Marktpreis von 100 GE/ME abgesetzt werden kann. Aus diesen Informationen ergeben sich die Umsatzfunktion $U(x) = 100x$ und die Gewinnfunktion

$$G(x) = U(x) - K(x) = 100x - (10x + 450) = 90x - 450.$$

Die Gewinnfunktion ist linear, streng monoton steigend, und die einzige Nullstelle ist $x = 5$. Gilt für die produzierte Menge also $x > 5$, so ergibt sich ein positiver Gewinn, der mit wachsendem x weiter steigt. ■

In diesem einfachen Beispiel ist auch die Gewinnfunktion linear, und der Gewinn wächst demnach mit jeder weiteren produzierten Mengeneinheit, und zwar konstant um 90 Geldeinheiten. Diese 90 Geldeinheiten entsprechen $G'(x)$ und werden auch als *Grenzgewinn* bezeichnet. Asymptotisch, also ohne Berücksichtigung der Fixkosten, ist der Prozess ohnehin klar: Variable Stückkosten von 10 GE/ME stehen hier einem Stückumsatz von 100 GE/ME gegenüber. Dass sich dieses Geschäft lohnt, überrascht nicht. Einzig, ab wann sich das Geschäft lohnt, also wann der Umsatz die Kosten übersteigt, ist die Frage, und in den Fixkosten ist begründet, dass dies nicht gleich von Beginn an passiert, sondern erst ab einer gewissen produzierten Menge. Diese Menge übrigens nennt man auch den *Break-Even-Point* oder die *Gewinnschwelle*. Ganz anders sieht das in folgendem Beispiel aus.

Beispiel 2.20

Es sei erneut die lineare Kostenfunktion

$$K(x) = 10x + 450$$

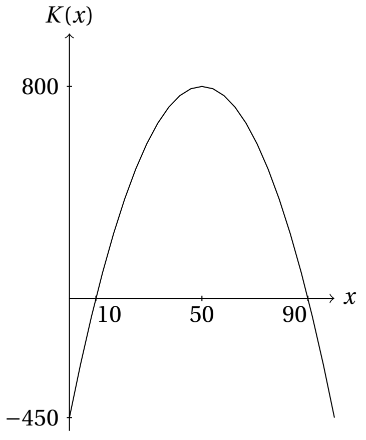


Bild 2.21 Der Graph der quadratischen Gewinnfunktion $G(x) = -0,5x^2 + 50x - 450$ aus *Beispiel 2.20*

gegeben, aber diesmal die nicht-konstante Preis-Absatz-Funktion

$$p(x) = 60 - 0,5x.$$

Es ergeben sich die Umsatzfunktion

$$U(x) = (60 - 0,5x)x = 60x - 0,5x^2$$

und die Gewinnfunktion

$$G(x) = U(x) - K(x) = 60x - 0,5x^2 - (10x + 450) = -0,5x^2 + 50x - 450.$$

Die Gewinnfunktion ist hier nun nicht mehr linear und auch nicht mehr streng monoton steigend. Es ist eine quadratische Funktion, deren Funktionsgraph, eine nach unten geöffnete Parabel, in *Bild 2.21* zu sehen ist. Der Break-Even-Point liegt hier bei $x = 10$ ME, und danach steigt der Gewinn an – allerdings nur bis zur Menge $x = 50$ ME. Hier erreicht er sein Maximum, wie man aus Nullsetzen von

$$G'(x) = -x + 50$$

sehr einfach sehen kann. Der Gewinn sinkt dann ab und wird für $x = 90$ ME wieder null, für größere Produktionsmengen sogar negativ. Für den zugehörigen Gewinn ergibt sich

$$G(50) = -0,5 \cdot 50^2 + 50 \cdot 50 - 450 = 800 \text{ GE}.$$

■

Beispiel 2.19 und *Beispiel 2.20* unterscheiden sich offenbar aufgrund der Struktur der Preis-Absatz-Funktion. Ist diese nämlich nicht konstant, sondern linear fallend wie in *Beispiel 2.20*, so hat das zur Folge, dass der Gewinn irgendwann wegen mangelnden Umsatzes bei gleichbleibenden variablen Stückkosten negativ wird. Wir führen in diesem Zusammenhang noch

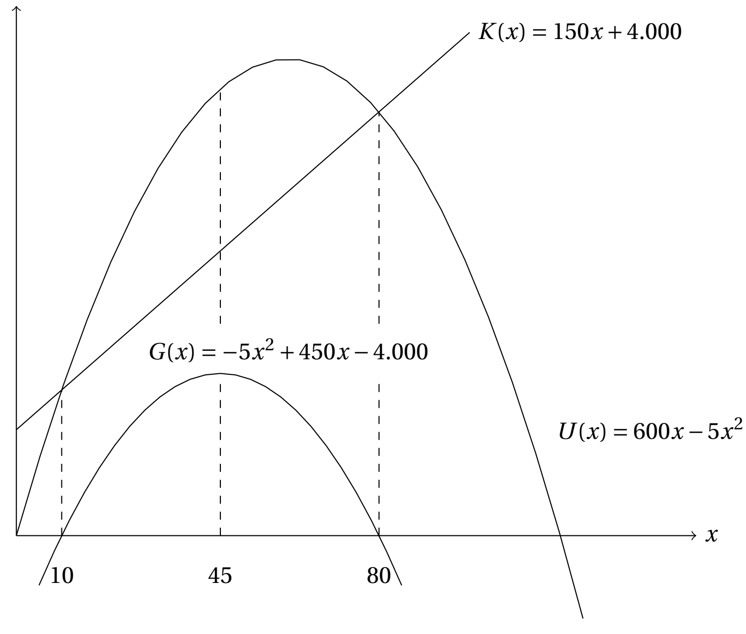


Bild 2.22 Kostenfunktion, Umsatzfunktion und Gewinnfunktion aus *Beispiel 2.21*. Die Nullstellen der Gewinnfunktion entsprechen den Schnittstellen von Kosten und Umsatz: Gewinnschwelle (Break-Even-Point) bei 10 ME und Gewinngrenze bei 80 ME. Im Gewinnmaximum liegt der Umsatz maximal hoch über den Kosten.

einige übliche Begriffe ein. Die Gewinnfunktion aus *Beispiel 2.20* ist in mancher Hinsicht typisch. Sie ist zunächst negativ, weil noch nicht so viel umgesetzt wird und auch die Fixkosten noch einen recht hohen Anteil verschlingen. Dann steigt der Gewinn aber mit zunehmender Produktion und wird irgendwann positiv. Dieser „Durchbruchspunkt" des Graphen durch die x-Achse, der Break-Even-Point, ist bei $x = 10$ ME erreicht. Die Gewinnfunktion steigt danach weiter, bis das *Gewinnmaximum* erreicht ist. Im Beispiel ist dies bei einer Produktion von $x = 50$ ME der Fall, und das Gewinnmaximum beträgt dort 800 GE. Bei weiterer Steigerung der Produktion sinkt der Gewinn nun wieder, und die Gewinnfunktion erreicht ein zweites Mal die x-Achse. Wir sind an der *Gewinngrenze* angekommen. Das Intervall $[10, 90]$, also den Bereich mit positiven Gewinn, nennt man auch die *Gewinnzone*.

Beispiel 2.21

Ein Unternehmen produziert als Monopolist ein neues Gerät für Freizeitsport. Als Monopolist muss das Unternehmen keine Konkurrenz befürchten und kann den Preis ohne Berücksichtigung eventueller Konkurrenten festsetzen. Es wurde festgestellt, dass sich der monatliche Absatz durch

$$x(p) = 120 - 0,2p$$

beschreiben lässt, was umgekehrt die Preis-Absatz-Funktion

$p(x) = 600 - 5x$

zur Folge hat. Die Kosten werden linear durch die Funktion

$K(x) = 150x + 4.000$

modelliert. Aus diesen Informationen können nun die Umsatzfunktion und die Gewinnfunktion ermittelt werden. Es ergeben sich

$U(x) = (600 - 5x) \cdot x = 600x - 5x^2$

und

$G(x) = 600x - 5x^2 - (150x + 4.000) = -5x^2 + 450x - 4.000.$

Sowohl $U(x)$ als auch $G(x)$ sind quadratische Funktionen, deren Graphen nach unten geöffnete Parabeln sind. Die Umsatzfunktion hat ihr lokales Maximum bei $x_U = 60$ ME, und die Gewinnfunktion hat ihr lokales Maximum bei $x_G = 45$ ME. Die gesamte Situation ist in *Bild 2.22* dargestellt. Dort kann man auch den maximalen Umsatz und den maximalen Gewinn ablesen, die sich durch Einsetzen von x_U bzw. x_G in die jeweiligen Funktionen ergeben. ■

Man sieht im *Bild 2.22* deutlich, dass im Maximum der Gewinnfunktion die Kostenfunktion und die Umsatzfunktion in vertikaler Richtung am weitesten voneinander entfernt sind. Bei weiterer Steigerung der Produktion sinkt der Gewinn wieder, da sich Kosten und Umsatz wieder annähern. Die Gewinngrenze ist dann bei 80 ME erreicht.

2.5.3 Betriebsoptimum und Betriebsminimum

Im Zusammenhang mit Preisen und Kostenfunktionen müssen noch zwei wichtige Begriffe eingeführt werden. Unter dem *Betriebsoptimum* versteht man das globale Minimum der Stückkostenfunktion $k(x)$. Das *Betriebsminimum* dagegen ist das globale Minimum der variablen Stückkostenfunktion $k_v(x)$. Im Betriebsoptimum wird also mit minimalen Gesamtstückkosten produziert. Der Marktpreis darf daher *langfristig* bis zum Wert des Betriebsoptimums fallen, ohne dass die Deckung der Kosten in Gefahr ist. So wird also vom Betriebsoptimum häufig auch von der *langfristigen Preisuntergrenze* gesprochen. Kurzfristig nimmt man manchmal die Nichtdeckung der Fixkosten in Kauf, sodass das Betriebsminimum die *kurzfristige Preisuntergrenze* markiert, bei der nur die variablen Kosten gedeckt sind.

Wie sieht das Betriebsoptimum in konkreten Fällen aus? Betrachtet man eine lineare Kostenfunktion, etwa $K(x) = 150x + 4.000$, so resultiert hieraus die Stückkostenfunktion

$$k(x) = 150 + \frac{4.000}{x},$$

die, wie *Bild 2.23* zeigt, streng monoton fallend ist und sich dem Wert 150, also den variablen Stückkosten annähert. Damit wird das Betriebsoptimum nicht als lokales Minimum im Inneren des Definitionsbereichs D_k angenommen, sondern es existiert als globales Minimum bei Einschränkung der Produktion am rechten Rand.