

# HANSER



## Leseprobe

Ulrich Gabbert, Ingo Raecke

Technische Mechanik für Wirtschaftsingenieure

ISBN (Buch): 978-3-446-43253-6

ISBN (E-Book): 978-3-446-43595-7

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

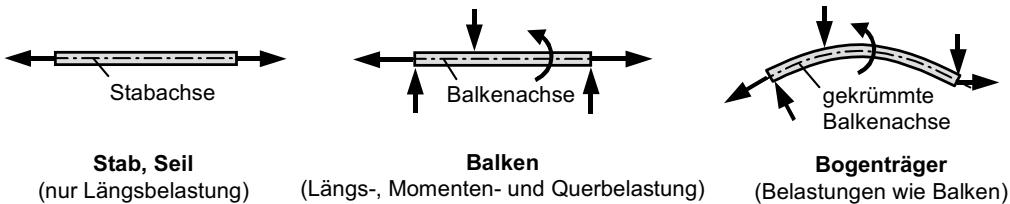
<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43253-6>

sowie im Buchhandel.

## 1.4 Ebene Tragwerke

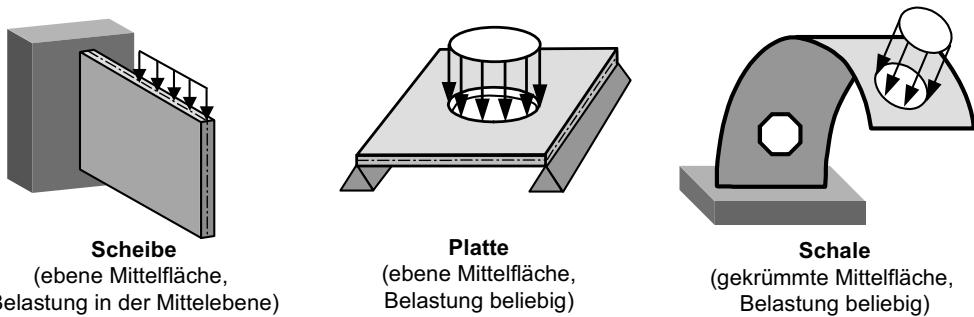
### 1.4.1 Grundbegriffe

Die Grundelemente von Tragwerken sind Idealisierungen von Bau- und Maschinenbauelementen. Dazu gehören unter anderem Linientragwerke (Seil, Stab, Balken, Bogenträger) und Flächentragwerke (Scheibe, Platte, Schale).



**Bild 1.23** Linientragwerke

Bei Linientragwerken ist die Länge groß gegenüber den Abmessungen des Querschnitts (siehe Bild 1.23). Von Stäben und Balken sprechen wir, wenn die Stablängsachse<sup>9</sup> eine Gerade ist. Ein Stab wird nur auf Zug/Druck belastet (Kräfte wirken nur in der Stabachse), während ein Balken zusätzlich auch durch Kräfte senkrecht zur Stabachse (Balkenachse) und durch Momente belastet werden kann. Wenn die Stablängsachse gekrümmmt ist, sprechen wir von einem Bogenträger oder einem gekrümmten Träger.<sup>10</sup>



**Bild 1.24** Flächentragwerke

Bei Flächentragwerken (siehe Bild 1.24) ist die Flächenausdehnung groß gegenüber der Dicke. Wir unterscheiden auch hier zwischen ebenen und gekrümmten Flächentragwerken. Bei einem ebenen Flächentragwerk ist die Mittelfläche eine Ebene. Nach

<sup>9</sup> Verbindungslinie der Flächenschwerpunkte

<sup>10</sup> Dabei wird häufig noch zwischen schwach und stark gekrümmten Trägern unterschieden.

der Art der Belastung unterscheiden wir zwischen Scheiben (Belastung erfolgt ausschließlich in der Mittelfläche, siehe *Bild 1.24*) und Platten (Belastung erfolgt vorrangig senkrecht zur Mittelfläche, kann aber auch zusätzlich in der Mittelfläche erfolgen, siehe *Bild 1.24*). Wenn die Mittelfläche gekrümmmt ist, sprechen wir von einer Schale (siehe *Bild 1.24*). Es gibt noch weitere Modellannahmen, die in technischen Anwendungen zu finden sind. Derartige Modellannahmen werden getroffen, da sich dadurch wesentlich einfachere Berechnungsmöglichkeiten im Vergleich zum allgemeinen dreidimensionalen Fall ergeben. Die Ergebnisse der Berechnungen stimmen umso besser mit der Realität überein, je besser die Modellannahmen erfüllt sind. Es ist eine wichtige Aufgabe des Ingenieurs, sicherzustellen, dass die gewählten Modellannahmen korrekt sind und die daraus resultierenden Fehler im Hinblick auf die Zielstellung der Berechnung vernachlässigbar klein werden.

### 1.4.2 Lagerung starrer Scheiben

Ein Lager bindet eine Scheibe an eine unbewegliche Umgebung. Für eine durch Lager gebundene starre Scheibe gilt, wenn  $b_{\text{ges}}$  die Summe aller Lagerbindungen ist:

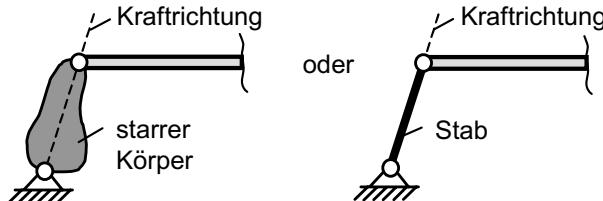
- die starre Scheibe ist statisch bestimmt gelagert, wenn für die Anzahl der Bewegungsfreiheitsgrade  $f = 3 - b_{\text{ges}} = 0$  gilt,
- die starre Scheibe ist beweglich, wenn für die Anzahl der Bewegungsfreiheitsgrade  $f = 3 - b_{\text{ges}} > 0$  gilt,
- die starre Scheibe ist statisch überbestimmt gelagert, wenn für die Anzahl der Bewegungsfreiheitsgrade  $f = 3 - b_{\text{ges}} < 0$  gilt. Wenn das System statisch überbestimmt gelagert ist, reichen die Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Lagerreaktionen nicht aus. Die Annahme eines starren Körpers muss dann fallen gelassen werden (siehe *Kapitel 2*).

Neben den schon im *Kapitel 1.3.6* erwähnten einwertigen Lagern gibt es noch eine Reihe anderer Lager, die die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  der starren Scheibe einschränken. Wir wollen nachfolgend die üblichen Lager genauer betrachten und die dafür in Rechnungen üblichen symbolischen Darstellungen einführen.

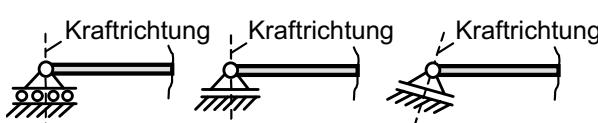
- a) **Loslager:** Die Anzahl der Bindungen ist  $b = 1$ , d. h. das Lager ist einwertig.  
Praktische Beispiele für Loslager sind
  - die Stabstütze (Pendelstütze),
  - das Seil,
  - das reibungsfreie Auflager,
  - die reibungsfreie Gleithülse.

Von diesen einwertigen Lagern können Stabstützen und reibungsfreie Gleithülsen sowohl Zug- als auch Druckkräfte aufnehmen. Seile können nur Zugkräfte und reibungsfreie Auflager nur Druckkräfte übertragen. Die üblichen symbolischen Darstellungsformen dieser Loslager sind in Bild 1.25 zusammengestellt.

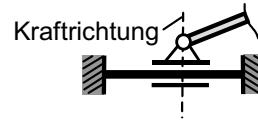
#### Stabstütze (Pendelstütze):



#### Reibungsfreies Auflager:

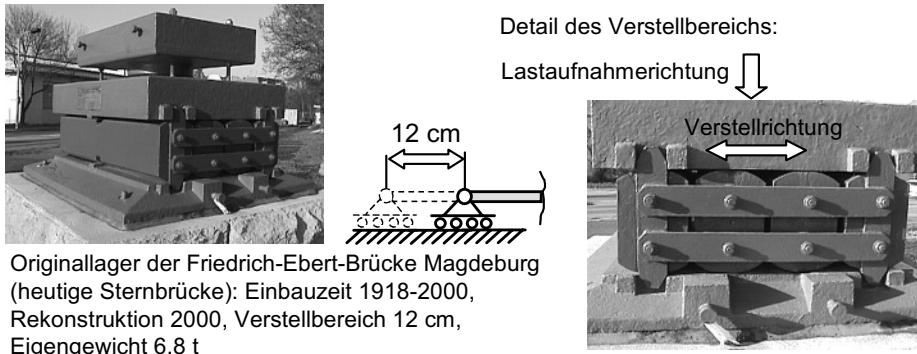


#### Reibungsfreie Gleithülse:



**Bild 1.25** Darstellung einwertiger Lager (Loslager); gestrichelt = Richtung, in der Kräfte aufgenommen werden

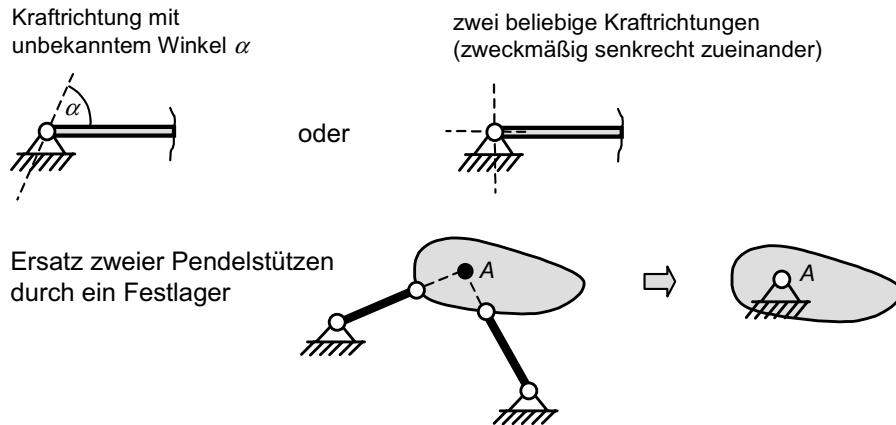
Das Foto in Bild 1.26 zeigt die reale Ausführung eines einwertigen Brückenlagers, welches als reibungsfreies Auflager idealisiert werden kann.



**Bild 1.26** Reale Ausführung eines Brückenlagers der Bauart: 4-gliedriges Stelzenlager

- b) **Festlager:** Die Anzahl der Bindungen ist  $b = 2$ , d. h. das Lager ist zweiwertig. Praktische Beispiele für Festlager sind
- reibungsfreies Gleitlager (Scharnier, Gelenk),
  - Auflage mit Haftung,
  - Schnittpunkt der Stabachsen zweier Pendelstützen.

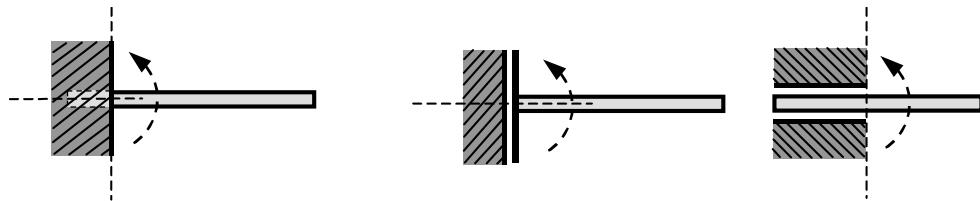
Die üblichen symbolischen Darstellungsformen von Festlagern und der Ersatz von zwei Pendelstützen durch ein Festlager sind in Bild 1.27 dargestellt.



**Bild 1.27** Darstellung zweiwertiger Lager (Festlager); gestrichelt = Richtung, in der Kräfte aufgenommen werden

- c) **Einspannung:** Die Anzahl der Bindungen ist  $b = 3$ , d.h. das Lager ist dreiwertig. Neben zwei Lagerkräften (wie beim Festlager) nimmt das Lager auch ein Biegemoment auf. Praktische Anwendungsfälle sind
- an eine starre Platte angeschweißter Träger,
  - in eine Mauer eingefügter Träger (siehe Bild 1.28 a),
  - durch Schrauben oder Niete mit einer starren Platte verbundener Träger.

Die übliche symbolische Darstellung einer Einspannung ist in Bild 1.28 dargestellt.



a) **Einspannung:**  
Zwei beliebige Kraftrichtungen  
(gestrichelt; senkrecht zueinander  
zweckmäßig) und ein Moment

b) **Bewegliche Einspannungen:**  
Eine Kraftrichtung  
(Richtung gestrichelt)  
und ein Moment

**Bild 1.28** Darstellung einer Einspannung ( $b = 3$ ) und von beweglichen Einspannungen ( $b = 2$ )

**Hinweis:** Eine starre Einspannung ist ein Idealfall, bei dem die Elastizität der Lagerung vernachlässigt wird. So weisen reale Lager in Abhängigkeit von der Ausführung des Lagers eine mehr oder weniger stark ausgeprägte Lagerelasti-

zität auf, die gegebenenfalls das Ergebnis entscheidend beeinflussen kann und daher in praktischen Anwendungsfällen genauer untersucht werden muss. Teilweise liegen für reale Lager Messungen der Lagerelastizitäten vor, die bei der Berechnung berücksichtigt werden können. Beispielsweise stellen Schrauben- oder Nietverbindungen im Stahlbau typische elastische Verbindungselemente dar, deren Elastizität in den meisten Fällen jedoch unberücksichtigt bleibt. Ob allerdings diese Modellannahme gerechtfertigt ist, muss im Einzelfall gesondert untersucht werden.

Es gibt aber auch bewegliche Einspannungen, die zwar ein Lagermoment aufnehmen können, das Tragwerk aber nur in einer Richtung fixieren. Die Anzahl der Bindungen ist in diesem Fall  $b = 2$ . Ein typisches Beispiel ist ein mit Führungen derart an einer starren Mauer befestigter Träger, dass er sich nur in vertikaler Richtung bewegen kann oder eine Welle, die längsverschieblich in einer starren Hülse geführt wird (siehe Bild 1.28 b).

### 1.4.3 Streckenlasten

#### 1.4.3.1 Definition von Streckenlasten

Streckenlasten sind auf eine Linie bezogene verteilte Lasten (siehe Bild 1.29), wie sie beispielsweise durch das Eigenwicht eines Trägers, durch Schüttlasten, durch Windlasten, durch Schneelasten u. ä. hervorgerufen werden.

Man kann sich eine Streckenlast als sehr viele unterschiedlich große Kräfte  $\Delta F_i$  vorstellen, die auf den Träger wirken. Die Intensität der Streckenlast an der Stelle  $z_i$  ergibt sich zu

$$q_i = q(z_i) = \frac{\Delta F_i}{\Delta z_i} \quad \Rightarrow \quad \Delta F_i = q(z_i) \Delta z_i \quad (1.14)$$

Wenn wir zu differentiell kleinen Größen übergehen, erhalten wir statt (1.14)

$$q(z) = \frac{dF}{dz} \quad \Rightarrow \quad dF = q(z) dz \quad (1.15)$$

Die Streckenlast hat die Intensität  $q(z)$  mit der Einheit Kraft pro Länge. Die Einheit ist N/m (kN/m, N/mm).

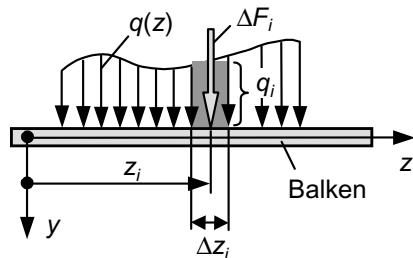
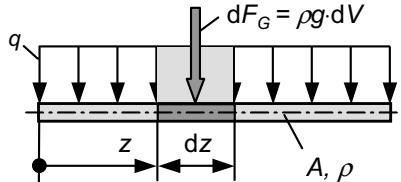


Bild 1.29 Streckenlast

### Beispiel 1.6 Eigengewicht eines Balkens als Streckenlast

Als Beispiel ermitteln wir die Streckenlast  $q(z)$ , die durch das Eigengewicht eines Balkens mit der Dichte  $\rho$  und der konstanten Querschnittsfläche  $A$  hervorgerufen wird (siehe Bild 1.30).



Es bedeuten:

- $\rho$  - Dichte
- $g$  - Erdbeschleunigung
- $A$  - Querschnittsfläche
- $dV$  - Volumenelement,  $dV = A \cdot dz$

Bild 1.30 Eigengewicht eines Balkens als Streckenlast

Aus der Gewichtskraft des differentiell kleinen Balkenabschnitts der Länge  $dz$  ergibt sich eine differentiell kleine Einzelkraft der Größe

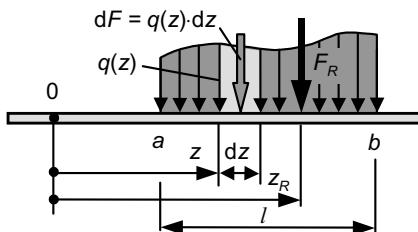
$$dF_G = \rho g \cdot dV = \underbrace{\rho g A \cdot dz}_{q(z)}$$

Der Vergleich mit Gleichung (1.15) bzw. Einsetzen von  $dF_G$  in (1.15) liefert:

$$\underline{q(z) = \rho g A}$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Intensitäten von Streckenlasten infolge Schneelast, Schüttgut o. ä. berechnen.

#### 1.4.3.2 Ermittlung der Resultierenden einer Streckenlast



Die Resultierende einer Streckenlast ergibt sich durch Aufsummieren, d. h. Integrieren, der differentiellen Einzelkräfte (1.15) über die Länge  $l$  des Balkens, auf der die Last wirkt. Damit ergibt sich mit den in Bild 1.31 angegebenen Bezeichnungen

$$F_R = \int_{(l)}^{z=b} dF = \int_{z=a}^{z=b} q(z) dz \quad (1.16)$$

Bild 1.31 Resultierende einer Streckenlast

**Hinweis:** An der Gleichung (1.16) erkennt man, dass die Resultierende  $F_R$  formal aus der „Fläche“, die durch  $q(z)$  und durch die Länge  $l = (b - a)$  aufgespannt wird, berechnet werden kann.

Wir wollen nun die Lage der Resultierenden ermitteln. Dazu bestimmen wir zunächst das Moment der Streckenlast bezüglich des Punktes 0. Es ergibt sich aus der Summe der Momente der differentiellen Kräfte  $dF$ , die jeweils den Hebelarm  $z$  bezüglich des Punktes 0 besitzen

$$M_0 = \int_{(l)} dM = \int_{(l)} z dF = \int_a^b z q(z) dz \quad (1.17)$$

Mit dem Moment der Resultierenden bezogen auf den Punkt 0

$$M_0 = F_R z_R \quad (1.18)$$

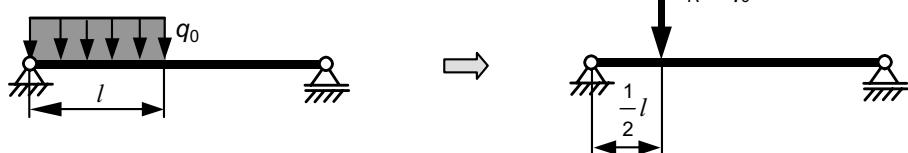
können wir durch Gleichsetzen der beiden *Gleichungen* (1.17) und (1.18) den Angriffspunkt  $z_R$  der Resultierenden berechnet. Wir erhalten

$$\int_a^b q(z) z dz = F_R \cdot z_R \quad \Rightarrow \quad z_R = \frac{1}{F_R} \int_a^b q(z) z dz \quad (1.19)$$

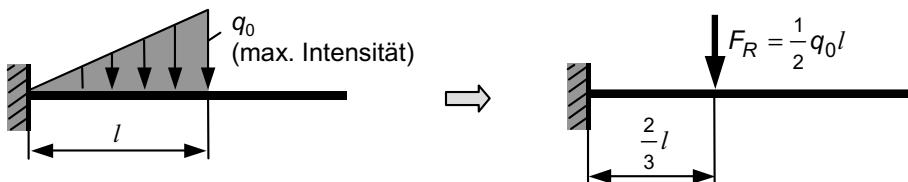
**Hinweis:** An der *Gleichung* (1.19) erkennt man, dass  $F_R$  durch den Flächenschwerpunkt der durch  $q(z)$  und der Länge  $l = (b - a)$  aufgespannten Fläche verläuft (vgl. *Kapitel 1.10.3*).

Das *Bild 1.32* zeigt die Ergebnisse für die Größe und die Lage der Resultierenden einer konstanten und einer linear veränderlichen Streckenlast (Dreiecklast), wie man sie nach den *Gleichungen* (1.16) und (1.19) bzw. mit Hilfe der obigen allgemeinen Hinweise zur Größe und Lage der Resultierenden einer Streckenlast ermitteln kann.

#### Rechtecklast



#### Dreiecklast



**Bild 1.32** Resultierende einer Rechtecklast und einer linear veränderlichen Last (Dreiecklast)

### 1.4.4 Beispiele

#### Beispiel 1.7 Balken auf zwei Stützen mit Einzellast



In Bild 1.33 sind ein Balken auf zwei Stützen mit einer Einzelkraft und die notwendige Schnittskizze zur Berechnung der Lagerreaktionen mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen (vgl. Kapitel 1.3.5) dargestellt.

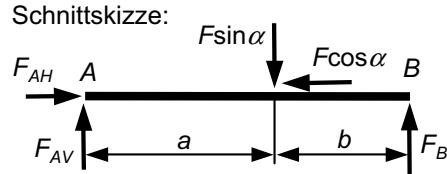
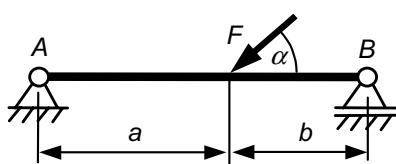


Bild 1.33 Balken auf zwei Stützen mit Einzellast

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \rightarrow : \quad & F_{AH} - F \cos \alpha = 0 \\ \curvearrowleft A : \quad & (F \sin \alpha) a - F_B(a+b) = 0 \\ \curvearrowleft B : \quad & F_{AV}(a+b) - (F \sin \alpha)b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \underline{\underline{F_{AH} = F \cos \alpha}} \\ \Rightarrow \quad & \underline{\underline{F_B = \frac{a \sin \alpha}{a+b} F}} \\ \Rightarrow \quad & \underline{\underline{F_{AV} = \frac{b \sin \alpha}{a+b} F}} \end{aligned}$$

Kontrolle:

$$\uparrow : \quad F_{AV} - F \sin \alpha + F_B = 0$$

Setzen wir hier die Ergebnisse der Lagerreaktionen ein, so folgt

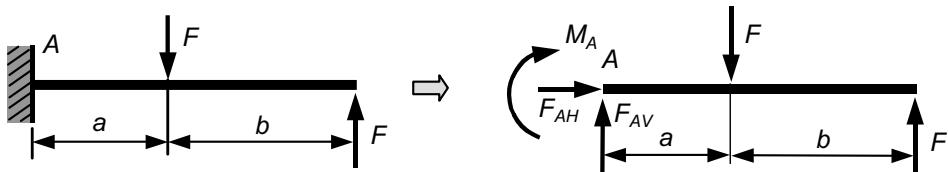
$$\frac{b \sin \alpha}{a+b} F - F \sin \alpha \frac{a+b}{a+b} + \frac{a \sin \alpha}{a+b} F = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{0=0}}$$

#### Beispiel 1.8 Eingespannter Kragbalken mit Kräftepaar

Der eingespannte Balken und die Schnittskizze sind im Bild 1.34 dargestellt. Die Gleichgewichtsbedingungen am freigeschnittenen Balken liefern:

$$\begin{aligned} \rightarrow : \quad & \underline{\underline{F_{AH} = 0}} \\ \uparrow : \quad & F_{AV} - F + F = 0 \\ \curvearrowleft A : \quad & M_A + Fa - F(a+b) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \underline{\underline{F_{AV} = 0}} \\ \Rightarrow \quad & \underline{\underline{M_A = Fb}} \end{aligned}$$

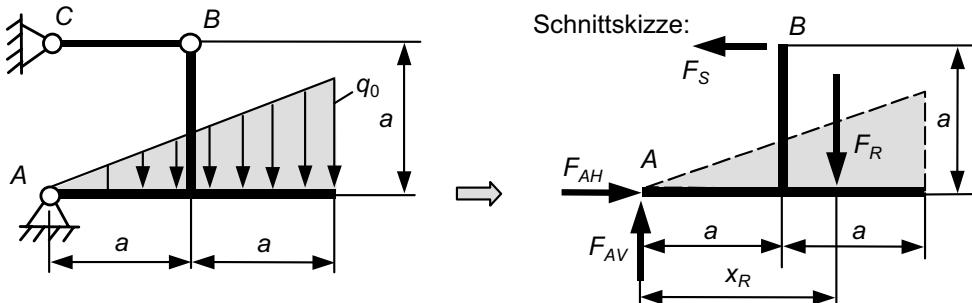


**Bild 1.34** Eingespannter Kragbalken mit Kräftepaar

Die Aufgabe zeigt, dass bei Wirkung eines Kräftepaars nur das Moment des Kräftepaars in das Lagermoment eingeht und der Abstand des Kräftepaars vom Lager keine Rolle spielt. Das ist eine Bestätigung des im *Kapitel 1.3.2, Seite 27* aufgestellten Satzes, dass das Moment (Kräftepaar) am starren Körper ein freier Vektor ist.

### Beispiel 1.9 Verzweigter Träger mit Dreiecklast

Das Bild 1.35 zeigt einen verzweigten Träger, der bei A mit einem Festlager gelagert ist und durch ein Seil, das am Punkt B des Trägers und bei C befestigt ist, gehalten wird. Zur Berechnung der Auflagerreaktionen und der Seilkraft schneiden wir den Träger frei und tragen die Kräfte an. Die Schnittskizze ist in Bild 1.35 dargestellt.



**Bild 1.35** Verzweigter Träger mit Dreiecklast

Bevor wir die Gleichgewichtsbedingungen aufschreiben, wird die Streckenlast durch ihre resultierende Kraft ersetzt (siehe *Kapitel 1.4.3.2, Bild 1.32*). Danach gilt:

$$F_R = \frac{1}{2}q_0 \cdot 2a = q_0 a \quad \text{und} \quad x_R = \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{4}{3}a$$

Die Gleichgewichtsbedingungen liefern mit  $F_R$  und  $x_R$ :

$$\uparrow : \quad F_{AV} - F_R = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_{AV} = q_0 a}}$$

$$\curvearrowleft A : \quad F_R \cdot x_R - F_S a = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_S = \frac{4}{3}q_0 a}}$$

$$\rightarrow : \quad F_{AH} - F_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_{AH} = F_S = \frac{4}{3}q_0 a}}$$