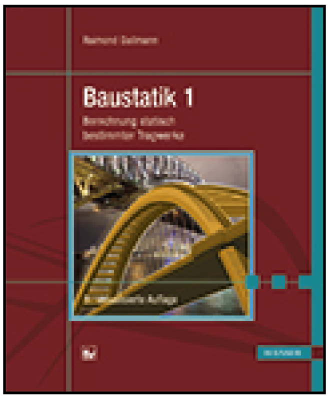
HANSER



Leseprobe

Raimond Dallmann

Baustatik 1

Berechnung statisch bestimmter Tragwerke

ISBN (Buch): 978-3-446-44501-7

ISBN (E-Book): 978-3-446-44506-2

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Lehrbuch hat das Ziel, die Grundlagen der Baustatik zu vermitteln. Es ist aus den von mir seit 1994 an der Fachhochschule in Wismar gehaltenen Lehrveranstaltungen entstanden und richtet sich an *Studienanfänger* des Bauingenieurwesens.

Die Statik ist die Grundlage für alle konstruktiven Lehrgebiete des Bauingenieurwesens. Ein fundiertes Grundlagenwissen auf diesem Gebiet ist daher unerlässlich, zumal die während des Studiums erworbenen theoretischen Kenntnisse die Basis für das gesamte weitere Berufsleben bilden.

Das Lehrgebiet der Baustatik gliedert sich in die Berechnung statisch bestimmter und statisch unbestimmter Tragwerke. Der vorliegende Band 1 behandelt statisch bestimmte Tragwerke. Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke sowie die Ermittlung von Verformungen sind Inhalt von Band 2.

In diesem Buch werden zunächst die für die Baustatik benötigten Grundlagen der Mechanik ausführlich behandelt. Die Darstellung der für die Berechnung statisch bestimmter Tragkonstruktionen erforderlichen Zusammenhänge erfolgt methodisch, wobei auf die spezifischen Eigenschaften spezieller Tragwerke eingegangen wird. Zum besseren Verständnis des Lehrstoffes schließen sich in jedem Kapitel an die theoretischen Grundlagen viele vollständig durchgerechnete Beispiele an. Die Anwendung der zuvor dargestellten Zusammenhänge wird anhand dieser Beispiele auf anschauliche Art ausführlich erläutert.

Die der *Baustatik* zugrunde liegende Methodik ist von der Art des Tragwerks unabhängig. Die Berechnung statisch bestimmter Systeme erfolgt durch Anwendung von Gleichgewichtsbedingungen. Es gibt keine spezielle Theorie des Dreigelenkrahmens oder des Gerberträgers, vielmehr ist die grundsätzliche Vorgehensweise für alle Tragwerksformen gleich. Das Verständnis der grundlegenden Methodik ist darum von so großer Bedeutung, weil sonst jedes statische System, das etwas anders aussieht als das vorherige, eine völlig neue, unlösbare Aufgabe darstellt.

Obwohl der Computer aus der Praxis des Bauingenieurs nicht mehr wegzudenken ist, hat das Erlernen der klassischen Methoden nicht an Bedeutung verloren. Es ist sogar noch wichtiger geworden, da durch die Anwendung von Computerprogrammen kaum noch Handrechnungen durchgeführt werden und daher das Gefühl für das Tragverhalten eines statischen Systems in der Berufspraxis nicht mehr ausgebildet werden kann. Die Unübersichtlichkeit von Computerberechnungen macht es jedoch unbedingt erforderlich, mit einfachen Methoden der Handrechnung die Ergebnisse komplizierter Berechnungsmodelle überprüfen zu können.

Statik lernt man nicht durch Bücher oder Lehrvorträge allein, sondern vor allem, *indem man selbst rechnet*. Das eigenständige intensive Üben des Lehrstoffes in Anwendung auf konkrete Aufgabenstellungen vermittelt oft auch erst im Nachhinein ein tieferes Verständnis der zugrunde liegenden Zusammenhänge. Zu diesem Lernprozess gehört selbstverständlich auch, dass man sich zunächst ungeschickt anstellt, unnötig hohen Aufwand betreibt oder auch Fehler macht. Auch ein falsch gewählter Berechnungsansatz oder eine schlecht gewählte Schnittführung stellen Erfahrungen dar, die dem Verständnis förderlich sein können.

Es kann gar nicht ausdrücklich genug betont werden, dass das Erlernen der Statik nur dann wirklich Erfolg haben kann, wenn es nicht auf die schematische Anwendung rezeptartiger Lösungsmuster auf ähnlich aussehende Aufgabenstellungen ausgerichtet ist, sondern vielmehr auf das Verständnis der grundlegenden Zusammenhänge.

Die Ausbildung im Fach Statik hat nicht nur das Ziel, praktische Fertigkeiten der Berechnung zu vermitteln. Sie schult auch eine gewisse Denkweise, fördert sowohl Anschauung als auch Abstraktionsvermögen und vermittelt ein „statisches Gefühl“ für das Tragverhalten von Konstruktionen.

Um die eigenständige Übung zu ermöglichen, enthält das vorliegende Buch eine Vielzahl von Übungsaufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches angegeben sind. Die vollständigen Lösungswege sind im Internet unter *http://www.bau.hs-wismar.de/Dallmann* zu finden.

Es würde mich freuen, wenn dieses Buch nicht nur hilft, die Prüfung im Fachgebiet Statik zu bestehen, sondern sogar zum wirklichen Verständnis beiträgt.

Die vorliegende vierte Auflage dieses Buches ist inhaltlich unverändert, es wurden jedoch bekannt gewordene Fehler korrigiert. Ich danke für die zahlreichen Hinweise sowie für die überwiegend sehr positive Beurteilung des Buches.

Weitere Vorschläge, Hinweise, Erfahrungen und Anregungen zur Verbesserung des Inhalts aus dem Leserkreis sind stets willkommen.

Dem Carl Hanser Verlag danke ich für die ansprechende Ausstattung des Buches und insbesondere der Lektorin Frau Christine Fritzsch für die sehr angenehme Zusammenarbeit.

Frau Bianca Hennings und Herrn Thomas Bittermann bin ich für die Kontrolle der Beispiele und Aufgaben zu großem Dank verpflichtet.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Nanette, die nicht nur viel Geduld und Verständnis beim Entstehen dieses Buches aufgebracht hat, sondern auch beim Korrekturlesen eine große Hilfe war.

Tressow, im Herbst 2012 Raimond Dallmann

Vorwort zur fünften Auflage

Auch die vierte Auflage ist von den Lesern sehr positiv aufgenommen worden. In der vorliegenden fünften Auflage wurden immer noch vorhandene Fehler korrigiert und punktuell Verbesserungen vorgenommen.

Mein großer Dank gilt in diesem Zusammenhang Herrn Mike Nemak, der durch sehr viele Hinweise und Anregungen zur weiteren Verbesserung des Buches beitrug.

Trotz der zahlreichen Korrekturen glaube ich nicht, dass diese Auflage nun fehlerfrei ist und freue mich über weitere Hinweise.

Weiterhin danke ich Herrn Philipp Thorwirth vom Lektorat des Carl Hanser Verlages für die gute und angenehme Zusammenarbeit.

Tressow, im Frühjahr 2015 Raimond Dallmann

1 Einführung

1.1 Einordnung der Statik

Die Mechanik und damit auch die Statik ist ein Teilgebiet der Physik. Sie ist die Lehre von den Kräften und Bewegungen. Der Teil der Mechanik, der insbesondere für technische Anwendungen relevant ist, wird auch als *Technische Mechanik* bezeichnet. Die Aufteilung der Mechanik zeigt das folgende Diagramm.

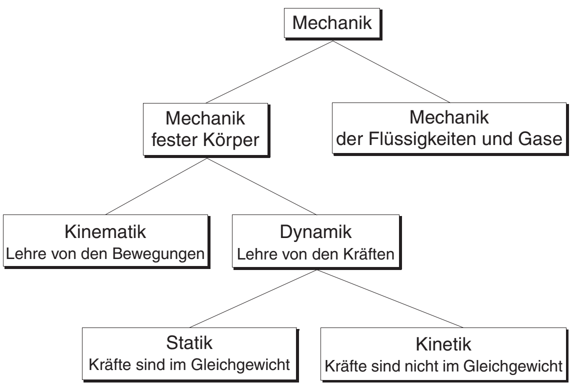


Bild 1.1 Einordnung der Statik

Die Statik ist die Lehre von den Kräften, die sich im Gleichgewicht befinden. Sie ist also ein Teilgebiet der *Dynamik*. Häufig wird der Begriff Dynamik irreführend als Gegensatz zur Statik verwandt. Eigentlich ist damit die *Kinetik* gemeint, also mechanische Vorgänge, die mit beschleunigten Bewegungen einhergehen.

Die Statik der Baukonstruktionen, also die Berechnungsverfahren, die speziell auf die Erfordernisse der Baukonstruktionen zugeschnitten sind, wird als *Baustatik* bezeichnet.

Die Methoden der Statik bzw. der Mechanik basieren auf Abstraktionen und Idealisierungen der Wirklichkeit. Die tatsächliche Konstruktion eines Bauwerks wird auf ein gedankliches Modell reduziert. Diese Abstraktion bereitet dem Studienanfänger häufig Schwierigkeiten, da nicht immer ersichtlich ist, welche Bedeutung manche Begriffsbildungen in der Realität besitzen.

Die Reduktion des wirklichen Bauwerks auf das mechanische Modell eines Tragsystems ist eine Aufgabe, die das Können erfahrener Ingenieure voraussetzt. Es kommt dabei darauf an, die wesentlichen Einflüsse zu berücksichtigen, aber alles zu vernachlässigen, was von untergeordneter Bedeutung ist.

Erst durch die Vereinfachung der äußerst komplizierten Wirklichkeit wird eine Berechnung überhaupt erst möglich. Die Baustatik betrachtet das idealisierte Tragwerk, das *Statische System.* Der Prozess der Modellbildung wird in diesem Buch nicht behandelt, er wird als bereits durchgeführt vorausgesetzt.

1.2 Kräfte

1.2.1 Der Kraftbegriff

Die Kraft ist eine physikalische Größe, die wir aus unserer Erfahrung kennen. Kräfte sind nicht sichtbar, ihre Existenz kann nur durch ihre Wirkung erkannt werden. Wenn wir Gegenstände heben oder tragen, spüren wir eine Wirkung in unseren Muskeln, die wir als Kraft bezeichnen.

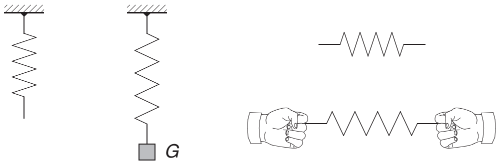


Bild 1.2 Kräfte als Ursache von Verformungen

Eine weitere alltägliche Erfahrung einer Kraftwirkung entsteht beim Verformen von Gegenständen. Um eine Schraubenfeder oder ein Gummiband zu dehnen, müssen Muskel- oder andere Kräfte wirken. Die dargestellte Schraubenfeder in *Bild 1.2* verlängert sich, wenn ein Gewicht angehängt wird oder wenn an beiden Enden gezogen wird.

Wir haben also eine Vorstellung davon, was eine Kraft ist. Diese Vorstellung ist eine Abstraktion, die wir als Ursache einer bestimmten Wirkung zuordnen.

Eine strenge Definition des Kraftbegriffs ist nicht möglich. Kräfte sind die Ursache von Form- und Bewegungsänderungen. Sie sind durch ihre *Größe*, ihre *Richtung* sowie durch ihren *Richtungssinn* gekennzeichnet, d. h., sie haben *vektoriellen Charakter*. Ein weitere wichtige Bestimmungsgröße ist der Angriffspunkt der Kraft.

Dass die Wirkung einer Kraft nicht nur von ihrer Größe abhängt, ist auch aus der Erfahrung geläufig. Die in *Bild 1.3* dargestellten Kräfte haben auf den rechteckigen Gegenstand, auf den sie einwirken, unterschiedliche Wirkungen, auch wenn sie dieselbe Größe haben. Aus diesem Grunde ist der Kraftvektor kein freier, sondern ein gebundener Vektor.

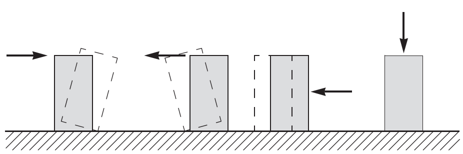


Bild 1.3 Unterschiedliche Wirkungen einer Kraft

Die neben der Muskelkraft ursprünglichste Vorstellung einer Kraftwirkung ist die der *Gewichtskraft*. Sie ist eine Folge der Gravitation, also der Eigenschaft zweier Körper (Massen), sich gegenseitig anzuziehen. Die irdische Gewichtskraft stellt die Kraft dar, mit der ein Körper an der Erdoberfläche durch die Masse der Erde angezogen wird. Sie ergibt sich als Sonderfall des Gravitationsgesetztes:

$$\boldsymbol{G} = m \cdot g$$

wobei m die Masse des Körpers und g die mittlere Erdbeschleunigung darstellt. Diese Kraft wirkt in Richtung des Erdmittelpunktes und kann in guter Näherung als senkrecht angesehen werden. Die mittlere Erdbeschleunigung beträgt:

$$g = 9{,}81 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

1.2.2 Darstellung der Kraft

Kräfte werden als gerichtete Strecke, als Pfeil veranschaulicht. Die Länge des Pfeils kennzeichnet die Größe der Kraft (mathematisch: der Betrag des Vektors), die Neigung des Kraftpfeils die Richtung und die Pfeilspitze den Richtungssinn. Vektoren werden durch Fettdruck gekennzeichnet.

Da aus der zeichnerischen Darstellung des Kraftvektors Richtung und Richtungssinn unmittelbar zu entnehmen ist, schreibt man in der Regel nur den Betrag der Kraft hinzu.

Die Einheit der Kraft ist das Newton [N], eine aus den Basiseinheiten des internationalen Einheitensystems SI (Système International d'Unité) abgeleitete Größe.

Die Kraft $1\ \mathrm{N}$ erteilt der Masse $1\ \mathrm{kg}$ die Beschleunigung $1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, es gilt: $1\ \mathrm{N} = 1\ \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

1.2.3 Einteilung der Kräfte

Kräfte lassen sich nach unterschiedlichen Gesichtspunkten einteilen.

Ein Unterteilungsgesichtspunkt ist die *Verteilung* der Kraft. Der bisher betrachtete Begriff der in einem Punkt angreifenden sogenannten Einzelkraft stellt eine Idealisierung dar. Diese Idealisierung ist annähernd nur dann gegeben, wenn z. B. mit einer Nadelspitze auf einen Körper gedrückt wird (*Bild 1.4a*).

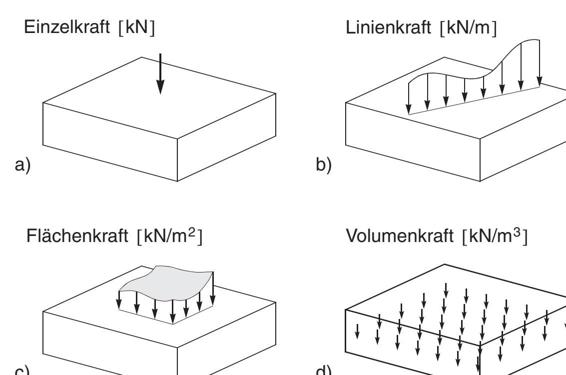


Bild 1.4 Unterschiedlich verteilte Kräfte

Auch eine linienförmig verteilte Kraft, auch *Linienkraft* oder Streckenlast genannt, stellt eine Abstraktion dar, die sich annähernd realisieren lässt, wenn man z. B. mit einer Messerschneide gegen einen Körper drückt (*Bild 1.4b*).

In der Wirklichkeit treten Kräfte nur in verteilter Form als *Volumen*- oder *Flächenkräfte* auf. Der in *Bild 1.4d* dargestellte Quader hat eine in seinem Volumen gleichmäßig verteilte Masse, wenn das Material, aus dem er besteht, homogen, also überall gleich ist. Aus diesem Grund ist natürlich auch seine Schwerkraft gleichmäßig innerhalb des Volumens verteilt. *Schwerkräfte* sind daher immer *Volumenkräfte*.

Flächenkräfte treten in der Berührungsfläche zweier Körper auf, siehe *Bild 1.4c*. Beispiele hierfür sind der Wasserdruck oder das Gewicht von Estrich und Fußbodenbelag auf einer Deckenplatte, das auf dieser verteilt wirkt.

Eine weitere Art der Einteilung ergibt sich aus der Unterscheidung von eingeprägten oder einwirkenden Kräften einerseits und Reaktionskräften andererseits. *Eingeprägte Kräfte* ergeben sich durch physikalische Gesetze und sind vorgegeben, man spricht auch von Lasten. Beispiele sind die Gewichtskräfte, Wasserdruck oder auch Reibung. *Reaktionskräfte* stellen Zwangskräfte dar, die sich aus den Bindungen eines Körpers ergeben, sie sind zunächst unbekannt.

Es werden noch *äußere* und *innere Kräfte* unterschieden. Während äußere Kräfte von außen auf einen Körper einwirken, werden innere Kräfte durch gedankliches Zerschneiden eines Körpers sichtbar gemacht. Sie werden an einem der Teile des durch den Schnitt getrennten Körpers zu äußeren Kräften.

1.2.4 Kräftesysteme

Ein Kräftesystem ist eine *Gruppe von Kräften*, die unter einem bestimmten Gesichtspunkt zusammengefasst werden können. So bilden alle auf einen Körper einwirkenden Kräfte ein Kräftesystem. Wirken alle Kräfte in einer Ebene, so spricht man von einem *ebenen* Kräftesystem, ist dies nicht der Fall, liegt ein *räumliches* Kräftesystem vor. Ein Kräftesystem, bei dem sich die Wirkungslinien aller Kräfte in einem Punkt schneiden, ist eine *zentrales Kräftesystem*.

Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, die Wirkung von Kräftesystemen auf einen starren Körper zu beurteilen.

1.3 Der starre Körper

Unter dem bereits verwendeten Begriff des Körpers versteht man ein mit Materie gefülltes Volumen. Ein starrer Körper ist ein Körper, der sich unter der Wirkung von Kräften nicht verformt. Da jeder reale Körper deformierbar ist, stellt die Annahme der Starrheit eine Idealisierung dar. Durch die Modellvorstellung des starren Körpers wird seine Bewegung in der Ebene auf drei Freiheitsgrade eingeschränkt. Unter einem *Freiheitsgrad* versteht man eine unabhängige Bewegungsmöglichkeit. Obwohl sich jeder Körper verformt, sind diese Verformungen in der Regel jedoch so klein, dass sie gegenüber den Abmessungen des Körpers vernachlässigbar sind und daher die Modellvorstellung der Starrheit annähernd zutrifft. Einen festen Körper, dessen Verformungen infolge von Kräften nur sehr klein sind, bezeichnet man als steif.

1.4 Axiome der Mechanik

Die Mechanik baut auf Axiomen auf. Axiome sind Grundgesetze, die unbeweisbar sind und auf der Erfahrung basieren. Die nachfolgend angegebenen Axiome sind die Grundlage aller weiteren Betrachtungen.

Trägheitsaxiom (1. Newtonsches Gesetz)[1]

Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

Newtons Grundgesetz der Mechanik
(2. Newtonsches Gesetz)

Die Bewegungsänderung ist der bewegenden Kraft proportional und erfolgt in Richtung der bewegenden Kraft, d. h., Kraft und Beschleunigungsvektor sind proportional.

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = m\ddot{\boldsymbol{x}}$$

1 Isaac Newton, engl. Physiker, Mathematiker u. Astronom, 1643 - 1727. In seiner Schrift „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687) veröffentlichte er u. a. die Newtonschen Axiome.

Reaktionsaxiom (3. Newtonsches Gesetz)
Die wechselseitige Wirkung zweier Körper aufeinander ist gleich groß und von entgegengesetzter Richtung (Aktion gleich Reaktion).

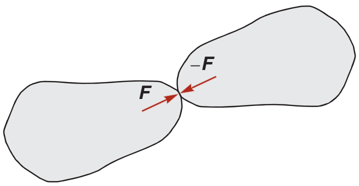


Bild 1.5 Reaktionsaxiom

Verschiebungsaxiom
Kräfte können am starren Körper beliebig auf ihrer Wirkungslinie verschoben werden, sind also *linienflüchtige Vektoren*.

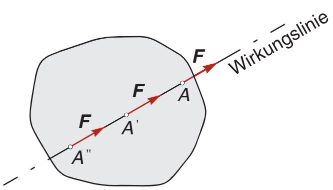


Bild 1.6 Verschiebungsaxiom

Parallelogrammaxiom
Die Wirkung zweier Kräfte mit gleichem Angriffspunkt ist ihrer vektoriellen Summe äquivalent. Zwei Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ können also durch eine einzige Kraft $\boldsymbol{R}$ wirkungsgleich ersetzt werden, wenn die Kraft $\boldsymbol{R}$ aus der Parallelogrammkonstruktion in *Bild 1.7* gebildet wird.

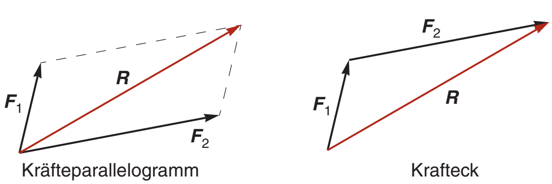


Bild 1.7 Parallelogrammaxiom

1.5 Das Schnittprinzip

Das Schnittprinzip stellt eines der wichtigsten Prinzipien der Mechanik dar. Erst durch seine Anwendung gelingt es, innere Beanspruchungen sichtbar zu machen. Der Körper wird gedanklich zerschnitten, um Aussagen über die inneren Kräfte machen zu können, die die getrennten Teile des Körpers aufeinander ausüben.

Wird die Schraubenfeder aus *Bild 1.2* in *Bild 1.8* durch einen Schnitt durchtrennt, so müssen die beiden dargestellten Kräfte wirksam sein, damit die wechselseitige Wirkung beider Teile aufeinander nicht verloren geht.

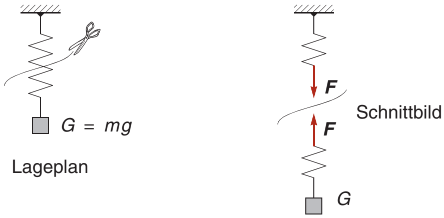


Bild 1.8 Beispiel zum Schnittprinzip

Aus dem *Reaktionsaxiom* folgt, dass die freigeschnittenen Kräfte immer entgegengerichtete Doppelgrößen sind. Der obere Teil der Feder zieht mit einer genau so großen Kraft am unteren Teil, wie der untere am oberen Teil. Das Schnittprinzip besteht in der folgenden axiomatischen Aussage:

Ist ein Körper im Gleichgewicht, so ist auch jeder Teil des Körpers im Gleichgewicht, der durch gedachte Schnitte herausgetrennt wurde.

1.6 Gleichgewicht

Die Statik ist die Lehre von den Kräften, die sich im Gleichgewicht befinden. Wann sind Kräfte im Gleichgewicht? Diese Frage beantwortet das Trägheitsaxiom sowie das Newtonsche Grundgesetz.

Ein ruhender Körper bleibt im Zustand der Ruhe, wenn er unter der Wirkung eines Kräftesystems $\boldsymbol{F}_i$ keine Beschleunigung erfährt. Dieser Ruhezustand wird als *Gleichgewichtszustand* bezeichnet. Ein Kräftesystem, das auf einen Körper wirkt, befindet sich im Gleichgewicht, wenn es den Körper nicht beschleunigt.

Die gleichförmige geradlinige Bewegung ist ebenfalls ein Gleichgewichtszustand, aber in der Baustatik ohne Bedeutung.

Die Gleichgewichtsbedingung ergibt sich daher als Sonderfall des Newtonschen Grundgesetzes:

$$\sum \boldsymbol{F}_i = 0$$

2 Das zentrale Kräftesystem

Ein zentrales Kräftesystem ist dadurch gekennzeichnet, dass sich die Wirkungslinien aller Kräfte in einem Punkt schneiden. *Bild 2.1* zeigt ein aus vier Kräften bestehendes Kräftesystem. Die Darstellungen a) und b) sind völlig gleichwertig, da nach dem Verschiebungsaxiom alle Kräfte auf ihrer Wirkungslinie verschoben werden können.

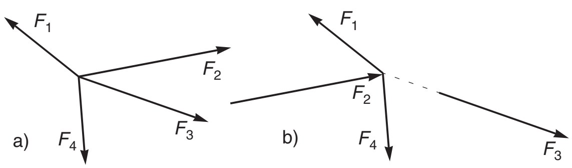


Bild 2.1 Zentrales Kräftesystem

2.1 Grafische Behandlung

Obwohl zeichnerische Verfahren keine praktische Bedeutung mehr haben, sind sie aufgrund ihrer Anschaulichkeit weiterhin wichtig, da sie den Einblick in die Zusammenhänge im Umgang mit Kräften erleichtern.

Für die zeichnerische Darstellung von Kräften ist es erforderlich, einen Kräftemaßstab zu wählen. Mithilfe dieses Maßstabs werden die Kräfte im *Kräfteplan* entsprechend ihrer Größe und Richtung dargestellt. Der *Lageplan* definiert den Angriffspunkt und die Richtung der Kräfte. In der Regel werden die Kräfte im Lageplan durch unmaßstäbliche Pfeile dargestellt und ihr Betrag durch eine Zahlenangabe festgelegt. Es ist allerdings auch möglich, die Größe der Kraft mithilfe eines Kräftemaßstabs durch die Länge des Pfeils anzugeben.

2.1.1 Resultierende eines zentralen Kräftesystems

Ziel ist die Reduktion des zentralen Kräftesystems, d. h., es soll durch eine einzige Kraft wirkungsgleich ersetzt werden. Diese Kraft ist die Resultierende des Kräftesystems.

Für die zeichnerische Ermittlung der Resultierenden werden nacheinander jeweils zwei Kräfte mithilfe der Parallelogrammkonstruktion bzw. des Kraftecks zusammengefasst. Die Zwischenresultierende lässt man dabei fort. Die dabei entstehende Konstruktion ist das Krafteck, siehe *Bild 2.2*.

Damit lässt sich die Resultierende nach folgender Vorschrift bilden:

Die Resultierende eines Kräftesystems ergibt sich, indem man alle Kraftpfeile hintereinander zeichnet. Die Verbindung des Anfangs der ersten Kraft mit der Spitze der letzten Kraft ist die Resultierende des Kräftesystems.

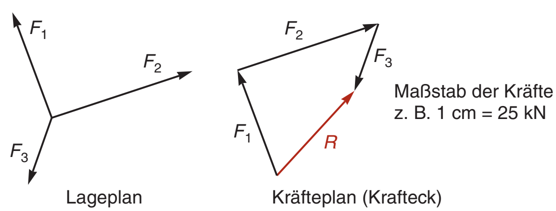


Bild 2.2 Resultierende eines zentralen Kräftesystems

2.1.2 Zerlegung einer Kraft in zwei vorgegebene Richtungen

Die Zerlegung einer Kraft ist die Umkehrung der vorherigen Aufgabenstellung der Reduktion des Kräftesystems. Gegeben ist nunmehr eine Kraft, die durch zwei andere Kräfte, deren Richtung vorgegeben ist, wirkungsgleich ersetzt werden soll.

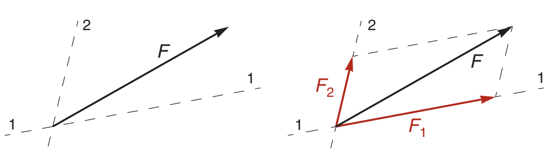


Bild 2.3 Zerlegung einer Kraft

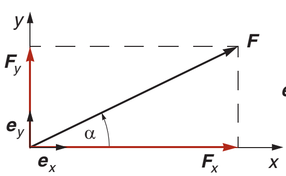
Die zeichnerische Lösung dieser Aufgabe ergibt sich unmittelbar aus der Parallelogrammkonstruktion in *Bild 2.3*. Es werden Parallelen zu den vorgegebenen Richtungen durch die Spitze der Kraft gezeichnet. Die

Schnittpunkte der Linien ergeben die Spitze der gesuchten Kraft.

Die Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei Richtungen ist nicht eindeutig möglich.

2.2 Rechnerische Behandlung

Zur rechnerischen Behandlung werden die Kräfte in einem *kartesischen Koordinatensystem* als Vektoren dargestellt. Dies entspricht der Zerlegung der Kraft in Richtung der Koordinatenachsen. Für den Fall des ebenen Kräftesystems ist dies in *Bild 2.4* dargestellt. Im Folgenden werden Vektoren durch Fettdruck gekennzeichnet.



$$\boldsymbol{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} |\boldsymbol{F}_x| &= F_x = |\boldsymbol{F}|\cos\alpha \\ |\boldsymbol{F}_y| &= F_y = |\boldsymbol{F}|\sin\alpha \end{aligned}$$

Bild 2.4 Vektorielle Darstellung einer Kraft

Jeder Kraftvektor kann durch seinen Betrag und einen Einheitsvektor, der die Richtung der Kraft beschreibt, dargestellt werden. Ein Einheitsvektor ist ein Vektor, dessen Betrag gleich eins ist. Beschreibt dieser Einheitsvektor die Richtung der Koordinatenachsen, so wird er als Basisvektor bezeichnet. Formal ergibt sich damit die Parallelogrammkonstruktion als Vektorsumme. Die Darstellung erfolgt für ein räumliches Kräftesystem, im ebenen Fall entfallen alle Größen mit dem Index *z*.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{F}_z = F_x\boldsymbol{e}_x + F_y\boldsymbol{e}_y + F_z\boldsymbol{e}_z$$

$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ sind die Basisvektoren, $\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{F}_y, \boldsymbol{F}_z$ die Komponenten von $\boldsymbol{F}$ bezüglich der Basis.

F_x, F_y, F_z sind die Projektionen der Kraft $\boldsymbol{F}$ auf die Basisvektoren $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$.

Es ist üblich, die Beträge der Komponenten in einer Klammer übereinander zu schreiben:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

Wird nur mit einer Basis gearbeitet, so unterscheidet man häufig nicht zwischen Komponenten und Projektionen. Die Projektionen F_x, F_y, F_z werden dann auch als die Komponenten der Kraft $\boldsymbol{F}$ bezeichnet. Wir werden von dieser Bezeichnungsweise auch Gebrauch machen, da wir nur in kartesischen Koordinaten arbeiten werden.

2.2.1 Resultierende des Kräftesystems

Die rechnerische Ermittlung der Resultierenden erfolgt für zwei Kräfte durch Bildung der Vektorsumme:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \\ &= (\boldsymbol{e}_x F_{x1} + \boldsymbol{e}_y F_{y1} + \boldsymbol{e}_z F_{z1}) + (\boldsymbol{e}_x F_{x2} + \boldsymbol{e}_y F_{y2} + \boldsymbol{e}_z F_{z2}) \\ &= \boldsymbol{e}_x(F_{x1} + F_{x2}) + \boldsymbol{e}_y(F_{y1} + F_{y2}) + \boldsymbol{e}_z(F_{z1} + F_{z2}) \\ &= \boldsymbol{e}_x R_x + \boldsymbol{e}_y R_y + \boldsymbol{e}_z R_z \end{aligned}$$

Die Erweiterung auf mehr als zwei Kräfte ist offensichtlich.

Für *n* Kräfte $\boldsymbol{F}_i$ gilt:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{xi} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{yi} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{zi} \end{bmatrix}$$

Beispiel 2.1

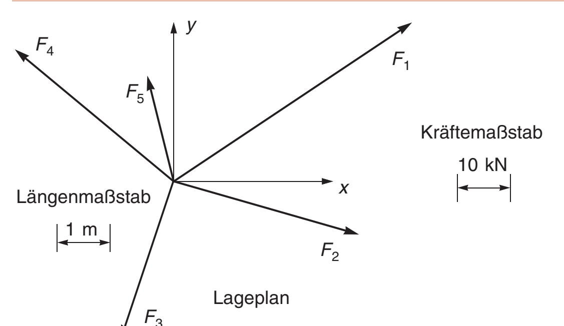


Bild 2.5 Zentrales Kräftesystem

Gegeben ist das zentrale Kräftesystem im Lageplan in *Bild 2.5*. Die Größe der Kräfte (Betrag) ist dabei nicht durch eine Zahl angegeben, sondern durch dieselbe maßstäbliche Darstellung wie im Kräfteplan. Gesucht ist die Resultierende des Kräftesystems.

Zeichnerische Lösung:
Die Kräfte werden aus dem Lageplan entsprechend ihrer Länge parallel in den Kräfteplan verschoben, die Reihenfolge ist dabei beliebig, siehe *Bild 2.6*. Die hier gewählte Reihenfolge entspricht der Nummerierung der Kräfte.

Nach dem Hintereinanderzeichnen der fünf Kräfte ergibt sich die Resultierende als Verbindung des Anfangspunktes der Kraft F_1 mit der Spitze der Kraft F_5. Der Betrag der Resultierenden wird durch Ausmessen ermittelt. Der gemessene Wert von 3,5 cm entspricht einer Kraft von 50,0 kN. Die Neigung der Resultierenden lässt sich mit 45° ablesen. Die Resultierende wird schließlich parallel in den gemeinsamen Schnittpunkt des zentralen Kräftesystems im Lageplan verschoben.

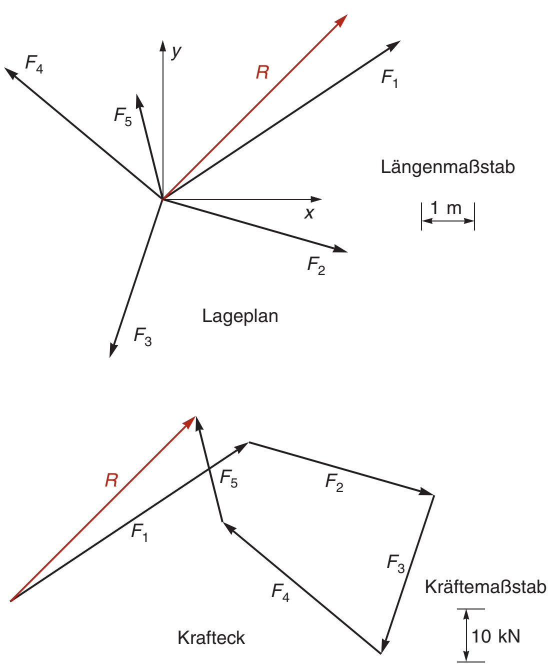


Bild 2.6 Zeichnerische Ermittlung der Resultierenden

Rechnerische Lösung:
Es werden zunächst alle Kräfte als Vektoren angeschrieben, dafür wird ein rechtwinkliges *x*-*y*-Koordinatensystem im gemeinsamen Schnittpunkt des Kräftesystems zugrunde gelegt. Um die Kraft F_1 zu beschreiben, muss man 3,15 cm in x-Richtung und 2,1 cm in y-Richtung vom Ursprung fortschreiten, um zur Spitze der Kraft zu gelangen. Dies entspricht nach dem Kräftemaßstab einer horizontalen Komponente von 45 kN und einer vertikalen Komponente von 30 kN.

Entsprechend wird bei den anderen Kräften verfahren. Ist es erforderlich, sich in negative Koordinatenrichtung zu bewegen, um zur Kraftspitze zu gelangen, so ist die Kraftkomponente negativ. Damit ergeben sich die fünf Kräfte zu:

$$\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix} 45 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} 35 \\ -10 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{F}_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ -30 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_4 = \begin{bmatrix} -30 \\ 25 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{F}_5 = \begin{bmatrix} -5 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Die Einheit kN wird aus Gründen der Übersichtlichkeit bei der Berechnung weggelassen und erst beim Endergebnis wieder angegeben. Die Resultierende ergibt sich durch Addition aller Kräfte als Vektorsumme.

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 + \boldsymbol{F}_5$$

$$= \begin{bmatrix} 45 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 35 \\ -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -30 \\ 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 45 + 35 - 10 - 30 - 5 \\ 30 - 10 - 30 + 25 + 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 35 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Der Betrag der Resultierenden folgt aus dem Satz des Pythagoras.

$$|\boldsymbol{R}| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{35^2 + 35^2}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 35^2} = \sqrt{2} \cdot 35 = 49{,}50 \text{ kN}$$

Die Neigung erhält man mit:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \arctan\left(\frac{35}{35}\right) = \arctan(1) = 45°$$

2.2.2 Kräftezerlegung

Ausgangspunkt der rechnerischen Behandlung der Kräftezerlegung ist das *Parallelogrammaxiom*. Gegeben ist eine Kraft $\boldsymbol{F}$ sowie zwei Richtungen, in die die Kraft zerlegt werden soll. Unbekannt sind die beiden Komponenten der Kraft.

Jeder Kraftvektor ist darstellbar als das Produkt aus dem Betrag und einem Richtungsvektor, der den Betrag eins hat. Dieser sogenannte Einheitsrichtungsvektor wird durch eine hochgestellte Null bezeichnet.

$$\boldsymbol{F} = |\boldsymbol{F}| \cdot \boldsymbol{n}^0 = F \cdot \boldsymbol{n}^0$$

Der Einheitsrichtungsvektor ergibt sich aus einem beliebigen Vektor durch Division durch seinen Betrag.

$$\boldsymbol{n}^0 = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$$

Daraus folgt:

$$\boldsymbol{F} = F \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{F}{|\boldsymbol{n}|} \cdot \boldsymbol{n} = \tilde{F} \cdot \boldsymbol{n} \text{ mit } \tilde{F} = \frac{F}{|\boldsymbol{n}|}$$

Die beiden gesuchten Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ werden nun in dieser Form dargestellt.

$$\boldsymbol{F}_1 = \tilde{F}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1, \quad \boldsymbol{F}_2 = \tilde{F}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2$$

Die Faktoren $\tilde{F}_1$ und $\tilde{F}_2$ werden aus der Bedingung ermittelt, dass die Resultierende aus $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ gleich der Kraft $\boldsymbol{F}$ ist.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 \quad + \quad \boldsymbol{F}_2 \quad &= \boldsymbol{F} \\ \tilde{F}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 + \tilde{F}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2 &= \boldsymbol{F} \end{aligned}$$

Damit ergeben sich zwei skalare Gleichungen für die unbekannten Faktoren $\tilde{F}_1$ und $\tilde{F}_2$.

Beispiel 2.2

Gegeben ist die Kraft $\boldsymbol{F}$ mit einem Betrag von 50 kN in *Bild 2.7*. Ihre Wirkungslinie sowie die Richtungen 1 und 2 sind durch je zwei vermaßte Punkte vorgegeben.

Zeichnerische Lösung:

Die Kraft $\boldsymbol{F}$ wird parallel zu ihrer Wirkungslinie mit einer Länge von 3,5 cm im Kräfteplan gezeichnet. Die beiden Richtungen werden parallel durch den Anfangs- und Endpunkt der Kraft verschoben. Die Reihenfolge ist dabei beliebig. Es sind hier beide Möglichkeiten dargestellt, selbstverständlich reicht eine Möglichkeit für die Lösung der Aufgabe aus.

Die Beträge der beiden Komponenten können nun aus dem Kräfteplan abgemessen und mithilfe des Kräftemaßstabs umgerechnet werden. Damit erhalten wir:

$$F_1 = 1{,}4 \text{ cm} \cdot \frac{10}{0{,}7} \frac{\text{kN}}{\text{cm}} = 20{,}0 \text{ kN}$$

$$F_2 = 2{,}35 \text{ cm} \cdot \frac{10}{0{,}7} \frac{\text{kN}}{\text{cm}} = 33{,}6 \text{ kN}$$

Die Genauigkeit des durch zeichnerische Lösung erzielten Ergebnisses ist selbstverständlich von dem gewählten Maßstab abhängig.

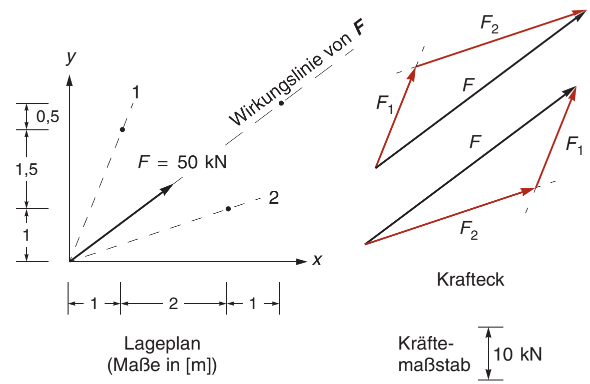


Bild 2.7 Beispiel zur Kraftzerlegung

Rechnerische Lösung:

Es wird zunächst die Kraft $\boldsymbol{F}$ als Vektor dargestellt. Der Einheitsvektor in Richtung der Wirkungslinie ist:

$$\boldsymbol{n}^0 = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Damit erhält man für den Kraftvektor:

$$\boldsymbol{F} = F \cdot \boldsymbol{n}^0 = 50 \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Aus der Bedingung $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}$ folgt:

$$\tilde{F}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 + \tilde{F}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{F}$$

$$\tilde{F}_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \tilde{F}_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Hinweis: Da die Länge des Richtungsvektors beliebig ist, wurde für $\boldsymbol{n}_1$ nicht $\begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}$, sondern $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ gewählt, um nur „glatte" Zahlen zu erhalten.

Es ergeben sich zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$2\tilde{F}_1 + 3\tilde{F}_2 = 40$$
$$5\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 = 30$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit -3 und Addition zur ersten Zeile ergibt:

$$2\tilde{F}_1 + (-3) \cdot 5\tilde{F}_1 = 40 + (-3) \cdot 30$$
$$-13\tilde{F}_1 = -50$$
$$\tilde{F}_1 = 3{,}846$$

Durch Einsetzen in eine der Ausgangsgleichungen erhalten wir $\tilde{F}_2 = 10{,}77$.

Die berechneten Werte haben keine unmittelbare mechanische Bedeutung, sondern sind nur Faktoren für die gewählten Richtungsvektoren. Die Beträge der gesuchten Kräfte folgen aus der Beziehung:

$$\tilde{F} = \frac{F}{|\boldsymbol{n}|} \Rightarrow F = \tilde{F} \cdot |\boldsymbol{n}|$$

Für das vorliegende Beispiel ergibt sich:

$$|\boldsymbol{n}_1| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$
$$|\boldsymbol{n}_2| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$
$$\Rightarrow F_1 = 3{,}846 \cdot \sqrt{29} = 20{,}71 \text{ kN}$$
$$F_2 = 10{,}77 \cdot \sqrt{10} = 34{,}06 \text{ kN}$$

Die Kraftvektoren sind:

$$\boldsymbol{F}_1 = \tilde{F}_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 3{,}846 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}692 \\ 19{,}23 \end{bmatrix} \text{ und}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = \tilde{F}_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 10{,}77 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32{,}31 \\ 10{,}77 \end{bmatrix}$$

2.3 Gleichgewicht am Punkt

Nach Abschnitt 1.6 ist ein zentrales Kräftesystem im Gleichgewicht, wenn die Resultierende des Kräftesystems gleich null ist.

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \qquad (2.1)$$

Die Resultierende eines zentralen Kräftesystems ergibt sich zeichnerisch aus der Konstruktion des Kraftecks. Gelangt man mit der Spitze des letzten Kraftvektors wieder an den Anfangspunkt des ersten Kraftpfeils, so verbleibt keine Resultierende. Das Krafteck ist geschlossen.

Rechnerisch folgt aus Gl. (2.1) der obigen Bedingung, dass alle Komponenten der Resultierenden gleich null sein müssen. Aus dieser Bedingung ergeben sich in der Ebene zwei skalare Gleichungen:

$$\sum F_{xi} = 0, \quad \sum F_{yi} = 0$$

Für den Fall des räumlichen zentralen Kräftesystems kommt als dritte Gleichung noch $\sum F_{zi} = 0$ hinzu.

Ist ein zentrales Kräftesystem gegeben, lässt sich durch Reduktion feststellen, ob eine Resultierende verbleibt oder ob diese gleich null ist, also Gleichgewicht herrscht.

Die Aufgabenstellung sieht in der Regel aber anders aus. Es sind einige Kräfte gegeben und einige Kräfte sind unbekannt. Die Fragestellung ist nunmehr, wie groß diese unbekannten Kräfte sind, damit Gleichgewicht vorhanden ist. Die gegebenen Kräfte sind die auf einen Körper einwirkenden Aktionskräfte, die unbekannten die Reaktionskräfte.

Beispiel 2.3

Die in *Bild 2.8* dargestellte Skizze ist das statische System einer Konstruktion. Es besteht aus zwei Stäben, die im Punkt *A* durch ein Gelenk verbunden sind. Beide Stäbe sind am anderen Ende so befestigt, dass sie sich frei verdrehen können.

Solch eine Befestigung nennt man (gelenkiges) Auflager, es wird durch ein Symbol dargestellt. Die Gelenke werden als völlig reibungsfrei und die Stäbe als gewichtslos vorausgesetzt. Dieses statische System stellt also das Ergebnis einer Idealisierung dar.

Sachwortverzeichnis