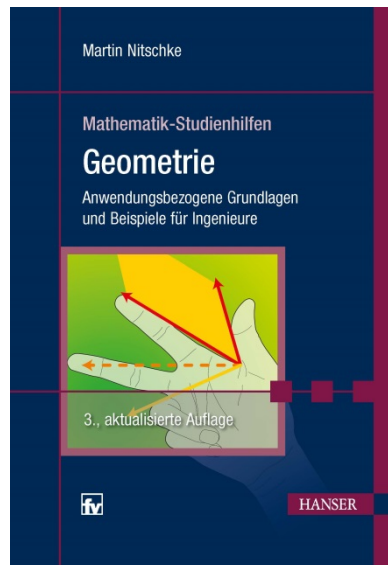


# HANSER



## Leseprobe

zu

## „Geometrie, 3. Auflage“

von Martin Nitschke

ISBN (Buch): 978-3-446-45101-8

ISBN (E-Book): 978-3-446-45333-3

Weitere Informationen und Bestellungen unter  
<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-45101-8>  
sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

# Vorwort

In so gut wie allen technischen Studiengängen hat die Geometrie ihren Platz; sei es als eigenes Fach, als Teil des Mathematikurses oder versteckt in anderen Lehrveranstaltungen. Daran ändert auch die zunehmende Leistungsfähigkeit und Verfügbarkeit ausgefeilter CAD-Systeme nichts; CAD ist kein Ersatz, sondern häufig ein Werkzeug und manchmal eine Weiterentwicklung der klassischen Geometrie. Ähnlich wie in den Grundschulen weiterhin das Schreiben mit der Hand unterrichtet wird (obwohl es Textverarbeitungsprogramme gibt), ist die Geometrie Bestandteil jeder Ingenieurausbildung. Der souveräne Umgang mit CAD setzt ein umfangreiches geometrisches Grundwissen voraus. Da dieses nur bei wenigen Studienanfängern vorhanden ist, beginnt die vorliegende Studienhilfe mit einer Auffrischung (bzw. Einführung) einiger Zusammenhänge aus der Schulgeometrie. Danach werden als wesentliches Hilfsmittel zur analytischen Beschreibung Vektoren und Matrizen eingeführt. Damit und mit etwas Analysis lassen sich Kurven, Flächen und Körper darstellen sowie Bogenlängen, Flächeninhalte, Volumina, Abstände und Schnitte berechnen. Abschließend werden einige Grundaufgaben und Projektionen der darstellenden Geometrie behandelt.

Das Buch kann in der vorgegebenen Reihenfolge durchgearbeitet werden. In vielen Fällen wird zum Verständnis ein Zurückblättern erforderlich sein; auf die entsprechende Stelle wird dann durch eine Formel-, Satz-, Bild- oder Aufgabennummer verwiesen. Literatur- und Internethinweise auf tiefer gehende und/oder weiterführende Betrachtungen sind in eckige Klammern [ ] gesetzt und im Literatur- und Internetverzeichnis spezifiziert. Die vorliegende Auflage enthält neben Korrekturen insbesondere aktualisierte Internetangaben. Alle zitierten Webseiten wurden mit dem Dienst WebCite® archiviert, so dass diese zeitlich unbegrenzt auch bei nachträglichen Änderungen und Löschungen in der zitierten Fassung abgerufen werden können.

Bei der Erstellung des Buches wurden das Satzsystem  $\text{\LaTeX}$ <sup>1</sup> und das mathematische Softwaresystem MATLAB<sup>2</sup> eingesetzt. Sämtliche Bilder wurden mit MATLAB erstellt; die Quelltexte sind im Internet verfügbar. Für Beispiele mit geographischem Bezug wurde zur Darstellung der Kontinentkonturen das frei verfügbare, weltumspannende digitale Höhenmodell [tbase.bin WWW] benutzt.

Diese Studienhilfe basiert auf meinen Lehrveranstaltungen an der Hochschule Neubrandenburg. Nicht zuletzt durch die konstruktive Kritik der

---

<sup>1</sup>Näheres zu  $\text{\LaTeX}$  unter [DANTE WWW].

<sup>2</sup>MATLAB® ist eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks Inc.

Studierenden konnte so manche Ungereimtheit beseitigt werden; herzlichen Dank dafür! Weitere Hinweise und Verbesserungsvorschläge aus dem Leserkreis sind selbstverständlich willkommen; meine E-Mail-Adresse und zusätzliche Informationen zum Buch finden Sie auf der Internetseite GEOMETRIE.HS-NB.DE. Ich danke KATI BLAUDZUN und ANDREAS WEHRENPENNIG für die mühevollen Arbeit des Korrekturlesens, Frau FRITZSCH und Frau WERNER für die angenehme und aufmerksame Zusammenarbeit. Ebenso danke ich Herrn ENGELMANN für die Aufnahme in diese Reihe und viele fachliche Hinweise.

Neubrandenburg, im August 2017

Martin Nitschke

## Symbole und Schriftarten

☞ **An diesen Stellen** ist der Leser eingeladen, zum Stift zu greifen und eine Aufgabe zu lösen. Aufgaben sind grundsätzlich in unmittelbarer Nähe zur Behandlung des jeweiligen Stoffes eingefügt. Dies ermöglicht eine sofortige Verständnisüberprüfung. Am Ende des Buches sind die Lösungen der Aufgaben in Kurzform zusammengestellt; eine ausführlichere Fassung steht auf GEOMETRIE.HS-NB.DE.

➤ Französische Anführungszeichen markieren mit MATLAB programmierte Beispiele. MATLAB-Schlüsselwörter wie **function** sind fett gedruckt, die Namen vordefinierter Funktionen, wie zum Beispiel **sin**, zusätzlich unterstrichen. Funktionen aus der Symbolic Math Toolbox wie syms sind doppelt unterstrichen. Kommentare werden durch ein %-Zeichen eingeleitet und sind hier in Grau gesetzt. Antworten des MATLAB-Systems sind durch Schreibmaschinenschrift hervorgehoben. Die vollständige MATLAB-Dokumentation, also insbesondere die Beschreibung der vordefinierten Funktionen, ist sowohl in das MATLAB-System integriert als auch über [MATLAB helpdesk WWW] zugänglich. Eine gute Einführung in MATLAB und eine Übersicht über frei verfügbare Software zur Linearen Algebra sind auf [GRAMLICH WWW] zu finden. In den Programm-Beispielen dieser Studienhilfe werden MATLAB-Kenntnisse etwa im Umfang der [GRAMLICH WWW]-Einführung vorausgesetzt. Die MATLAB-Beispiele sollen die Umsetzung des Gelernten in Computerprogramme unterstützen; MATLAB- oder andere EDV-Kenntnisse sind jedoch keine Voraussetzung für das Verständnis dieses Buches. Weiteres zu MATLAB und ähnlichen Produkten ist in Abschnitt 2.1 zu finden.

✦ Das MATLAB-Logo und eine kleinere Schrift verweisen auf die MATLAB-Datei, die zum jeweiligen Bild oder Programm-Listing gehört. Der unter GEOMETRIE.HS-NB.DE abrufbare Quelltext ermöglicht Lesern mit MATLAB-Zugang, das Bild bzw. Programm zu reproduzieren und/oder für den jeweiligen Zweck (Konstruktionsvorlage, Vortragsfolie usw.) zu modifizieren.

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Anknüpfung an die Schulgeometrie</b>	<b>10</b>
1.1	Dreiecke, Vierecke, Vielecke . . . . .	10
1.2	Kongruenz, Ähnlichkeit, Strahlensätze . . . . .	17
1.3	Umfangs- und Flächeninhaltsberechnungen . . . . .	24
1.4	Einige Sätze über Dreiecke und Winkel . . . . .	33
1.5	Körper . . . . .	40
1.5.1	Quader, Zylinder, Prismen . . . . .	41
1.5.2	Pyramiden und Kegel . . . . .	43
1.5.3	Rotations- und Translationsflächen und -körper . . . . .	44
1.5.4	Allgemeinere Körper . . . . .	49
1.5.5	Polyeder . . . . .	52
<b>2</b>	<b>Matrizen, Vektoren, Koordinaten</b>	<b>54</b>
2.1	Grundlagen aus der Linearen Algebra . . . . .	54
2.2	Länge und Winkel . . . . .	62
2.3	Orthogonale Zerlegung von Vektoren . . . . .	66
2.4	Koordinatensysteme und -transformationen . . . . .	68
2.4.1	Kartesische Koordinaten . . . . .	68
2.4.2	Krummlinige Koordinaten . . . . .	73
2.5	Determinante, Kreuzprodukt, Orientierung . . . . .	84
2.5.1	Determinante (2d) . . . . .	84
2.5.2	Kreuzprodukt und Determinante (3d) . . . . .	88
2.6	Lineare Transformationen und homogene Koordinaten . . . . .	93
2.6.1	Drehungen und allgemeinere lineare Transformationen . . . . .	93
2.6.2	Homogene Koordinaten . . . . .	103

<b>3</b>	<b>Kurven, Flächen, Körper</b>	<b>106</b>
3.1	Kurven . . . . .	106
3.1.1	Parameterdarstellungen und Kurvenlängen . . . . .	106
3.1.2	Gleichungsdarstellungen ebener Kurven . . . . .	114
3.1.3	Funktionskurven . . . . .	118
3.1.4	Kegelschnitte (Kurven zweiter Ordnung) . . . . .	118
3.2	Flächen und Körper . . . . .	122
3.2.1	Parameterdarstellungen, Flächeninhalte, Volumina . . . . .	122
3.2.2	Gleichungsdarstellungen . . . . .	129
3.2.3	Flächen zweiter Ordnung . . . . .	129
3.3	Abstände und Schnitte . . . . .	132
3.3.1	Abstand eines Punktes von einer Kurve oder Fläche . . . . .	132
3.3.2	Abstände von Kurven und Flächen untereinander . . . . .	135
3.3.3	Schnitte . . . . .	139
<b>4</b>	<b>Projektionen und Grundaufgaben der darstellenden Geometrie</b>	<b>146</b>
4.1	Projektionen . . . . .	146
4.2	Grundaufgaben . . . . .	150
4.3	Begriffe und Beispiele zu ausgewählten Projektionen . . . . .	150
4.3.1	Kotierte Projektion . . . . .	150
4.3.2	Orthogonale Zweitafelprojektion . . . . .	153
4.3.3	Umkloppung und wahre Gestalt ebener Figuren . . . . .	155
4.3.4	Axonometrie . . . . .	157
	<b>Lösungen in Kurzform</b>	<b>162</b>
	<b>Verzeichnisse</b>	<b>171</b>
	Literatur und Internet . . . . .	171
	Personen . . . . .	174
	MATLAB-Programme . . . . .	175
	<b>Index</b>	<b>176</b>

(D1) Der Betrag der Determinante ist das Volumen des von  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  aufgespannten Parallelspace:

$$|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (2.167)$$

(D2) Sind  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  *rechtshändig* (also wie in Bild 2.28) orientiert, so ist die Determinante positiv; sonst negativ.

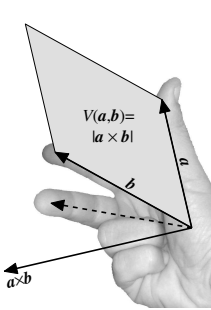


Bild 2.27:  
Kreuzprodukt  
◆ Kreuzprodukt.m

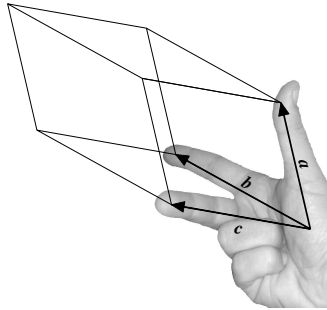


Bild 2.28: Determinante (3d)  
◆ det3d.m

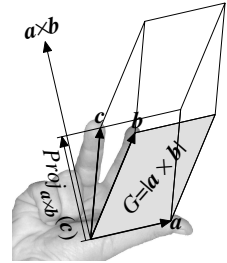


Bild 2.29: Volumen  
des Parallelspace  
◆ Parallelspace.m

Da ein Parallelspace ein spezielles Prisma ist, ist sein Volumen durch die Formel (1.104) gegeben. Ist die Grundfläche das von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannte Parallelogramm, so definiert nach (K2) das Kreuzprodukt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  eine zur Grundfläche senkrechte Richtung, und die Höhe des Parallelspace ist die Länge der Projektion von  $\mathbf{c}$  auf  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Nach (K1) ist der Inhalt der Grundfläche gleich  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ . Insgesamt gilt also

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{(1.104) \text{ und Bild 2.29}}{=} \overset{\text{Grundfläche}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \overset{\text{Höhe}}{|Proj_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}(\mathbf{c})|} \quad (2.168)$$

$$\stackrel{(2.55)}{=} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 ((\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 \cdot \mathbf{c})| \quad (2.169)$$

$$\stackrel{(2.32)}{=} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \underbrace{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0|}_{=1} |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 \cdot \mathbf{c}| \stackrel{(2.32)}{=} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 \cdot \mathbf{c}| \quad (2.170)$$

$$\stackrel{(2.19)}{=} |(|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0) \cdot \mathbf{c}| \stackrel{(2.12)}{=} |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|. \quad (2.171)$$

Sind wie in Bild 2.29 die Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  rechtshändig orientiert, so spannen  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  einen spitzen Winkel auf, und das Skalarprodukt  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

ist nach Satz 2.2 positiv. Entsprechend ergeben sich bei nicht rechtshändiger Orientierung ein stumpfer Winkel und ein negatives Skalarprodukt. Deshalb folgt aus (D1), (D2) und (2.171)

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}; \quad (2.172)$$

die Determinante von drei 3d-Vektoren lässt sich also auf die Berechnung von Skalar- und Kreuzprodukt zurückführen. Die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix ist als die Determinante ihrer Spaltenvektoren definiert:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}. \quad (2.173)$$

» Die für  $2 \times 2$ -Matrizen bereits behandelte MATLAB-Anweisung **det(A)** steht für beliebige  $n \times n$ -Matrizen, also auch für  $3 \times 3$ -Matrizen, zur Verfügung. Bei Determinanten von drei dreidimensionalen Spaltenvektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ist — wie im Zweidimensionalen — zunächst eine Matrix zu bilden und dann die Determinante zu berechnen: **det([a,b,c])**.

Die Berechnung der Determinante dreier Vektoren mittels Koordinaten wird in (2.201) behandelt. Ohne zu rechnen, ergeben sich aus geometrischen Überlegungen die folgenden Eigenschaften von Kreuz- und Spatprodukt:

Sind  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2$  dreidimensionale Spaltenvektoren und  $\lambda$  ein Skalar, so gilt:

### 1. Antikommutativgesetze

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (2.174)$$

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -\det(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}). \quad (2.175)$$

### 2. Kommutativgesetz für zyklische Vertauschung

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = \det(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (2.176)$$

### 3. Linearitätsgesetze

#### a) Additivitätsgesetze

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}, \quad (2.177)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2. \quad (2.178)$$

$$\det(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (2.179)$$

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) + \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}), \quad (2.180)$$

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1) + \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2). \quad (2.181)$$

## b) Skalare Multiplikativitätsgesetze

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (2.182)$$

$$\det(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda \mathbf{c}) = \lambda \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (2.183)$$

4. a) **Parallelitätskriterium:**  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind genau dann **parallel**, wenn  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}$  ist. Insbesondere ist

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{o}. \quad (2.184)$$

- b) **Komplanaritätskriterium:**  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  sind genau dann **komplanar**, d.h. in einer Ebene liegend, wenn  $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$  ist; insbesondere

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0. \quad (2.185)$$

5. Für die Koordinateneinheitsvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  aus (2.62) gilt

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad (2.186) \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \quad (2.189)$$

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad (2.187) \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \quad (2.190)$$

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \quad (2.188) \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2, \quad (2.191)$$

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1, \quad (2.192)$$

$$\det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = -1. \quad (2.193)$$

Aus diesen Eigenschaften folgen nun Formeln für die Berechnung des Kreuzprodukts und der Determinante mittels Koordinaten. Für beliebige dreidimensionale Spaltenvektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  gilt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \stackrel{(2.63)}{=} (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \times (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \quad (2.194)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(2.177), (2.178)}{=} a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \\ &\stackrel{(2.184)}{=} a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.195)$$

$$\stackrel{(2.186) - (2.191)}{=} (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 \quad (2.196)$$

$$\stackrel{(2.63)}{=} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (2.197)$$

Durch eine etwas längere Rechnung folgt daraus der **Entwicklungssatz von Hermann Günter Grassmann (1809–1877)**:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}. \quad (2.198)$$



Für die Determinante gilt nun  $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{(2.172), (2.197)}{=} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c}$

$$\stackrel{(2.4)}{=} (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3 \quad (2.199)$$

$$= a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 \quad (2.200)$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3. \quad (2.201)$$

Auf PIERRE FRÉDÉRIC SARRUS (1798–1861) geht die folgende Merkregel für (2.201) zurück:

Man schreibe die Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  spaltenweise nebeneinander und füge rechts daneben noch einmal die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  an:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 & \end{array}.$$

Die Determinante ist dann die Summe der Produkte in Richtung der Diagonalen von links oben nach rechts unten vermindert um die Summe der Produkte in Richtung der Diagonalen von links unten nach rechts oben.

### Beispiel 2.5

Es ist  $\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$  zu berechnen.

*Lösung:* Das Schema  $\begin{array}{ccccc} -1 & 4 & 7 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & -9 & 3 & 6 \end{array}$  ergibt  $\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-5) \cdot$   
 $(-9) + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-5) \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot (-1) - (-9) \cdot 2 \cdot 4 = 360.$  ■

Eine Anwendung der Determinanten ist die folgende, zum Beispiel in [FISCHER 2002] bewiesene, auf GABRIEL CRAMER (1704–1752) zurückgehende Regel.

### Satz 2.7 (Cramersche Regel)

Sind  $\mathbf{A}$  eine  $2 \times 2$ - bzw.  $3 \times 3$ -Matrix,  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  sowie ggf.  $\mathbf{a}_3$  die Spaltenvektoren von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{b}$  ein weiterer  $2 \times 1$ - bzw.  $3 \times 1$ -Vektor, und ist das Gleichungssystem  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  eindeutig lösbar,

so ist  $x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\det \mathbf{A}}$

bzw.  $x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3)}{\det \mathbf{A}}, \quad x_3 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b})}{\det \mathbf{A}}.$

*Bemerkung:* Die CRAMERSche Regel gilt allgemeiner für eindeutig lösbare, lineare  $n \times n$ -Gleichungssysteme. Während sie bei  $2 \times 2$ - und  $3 \times 3$ -Systemen ein

praktisches Verfahren für die manuelle Rechnung liefert, ist sie zur numerischen Lösung größerer Systeme wegen des im Allgemeinen hohen Aufwandes nicht geeignet.

### **Aufgabe 2.15**

Berechnen Sie die folgenden Kreuzprodukte und Determinanten:

1.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$
2.  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix},$
3.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right),$
4.  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$
5.  $\det \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j=1,2,3}.$

## 2.6 Lineare Transformationen und homogene Koordinaten

### 2.6.1 Drehungen und allgemeinere lineare Transformationen

Gegeben sind ein 2d-Vektor  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  und ein Winkel  $\alpha$ ; gesucht ist der Vektor  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ , der durch Drehung von  $\mathbf{v}$  um den Winkel  $\alpha$  entsteht. Geeignete Koordinaten zur Lösung dieser Aufgabe sind die aus Abschnitt 2.4.2ff bekannten Polarkoordinaten. Nach (2.95) und (2.96) ist dann

$$\mathbf{v} = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (2.202)$$

und

$$\mathbf{w} \stackrel{\text{Bild 2.30}}{=} r \begin{pmatrix} \cos(t+\alpha) \\ \sin(t+\alpha) \end{pmatrix} \stackrel{\text{Additions- theoreme}}{=} r \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos t - \sin \alpha \sin t \\ \sin \alpha \cos t + \cos \alpha \sin t \end{pmatrix} \quad (2.203)$$

$$\stackrel{(2.202)}{=} \begin{pmatrix} (\cos \alpha)v_1 - (\sin \alpha)v_2 \\ (\sin \alpha)v_1 + (\cos \alpha)v_2 \end{pmatrix} \stackrel{(2.2)}{=} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mathbf{v}. \quad (2.204)$$

Es gilt also

### **Satz 2.8**

Ein 2d-Vektor wird um einen gegebenen Winkel  $\alpha$  gedreht, indem man ihn mit der so genannten **Drehmatrix**  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  von links multipliziert.

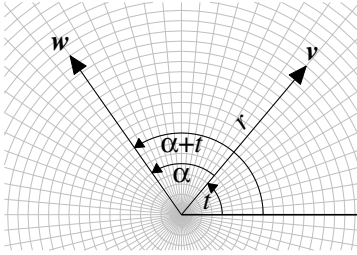


Bild 2.30: Drehung eines Vektors (2d)  Drehung2d.m

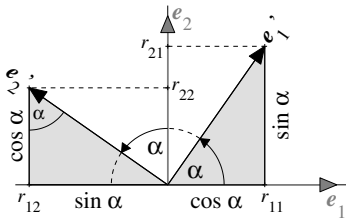



Bild 2.31: Drehmatrix und Richtungskosinus (2d)  Drehmatrix2d.m

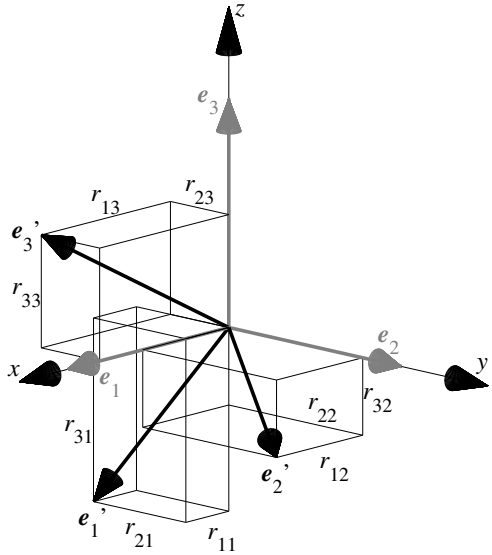



Bild 2.32: Drehmatrix und Richtungskosinus (3d)  Drehmatrix3d.m

### Aufgabe 2.16

- Gegeben sei ein zweidimensionaler Spaltenvektor  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ . Wie lauten die Koordinaten des Vektors, den man erhält, wenn man  $v$ 
  - um  $45^\circ$ ,
  - um  $90^\circ$ ,
  - um  $180^\circ$
dreht?
- Die aus der Definition (2.58) bekannten Koordinateneinheitsvektoren  $e_1$  und  $e_2$  werden um einen gegebenen Winkel  $\alpha$  gedreht. Bestimmen Sie die Koordinaten der gedrehten Vektoren  $e'_1$  und  $e'_2$ .

Wie aus Aufgabe 2.16,2 hervorgeht, stehen in den Spalten der Drehmatrix die Vektoren, die durch Drehung der Koordinateneinheitsvektoren entstehen; vgl. insbesondere die Ergebnisse (L.5) und (L.6). Bezeichnen wir die Drehmatrix mit  $R$  und ihre Elemente mit  $r_{ij}$ , also

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.205)$$

so ergibt sich aus Bild 2.31 und der Beziehung  $\pm \sin \alpha = \cos(90^\circ \mp \alpha)$

$$r_{11} = \cos \angle(e_1, e'_1), \quad (2.206)$$

$$r_{12} = \cos \angle(e_1, e'_2), \quad (2.208)$$

$$r_{21} = \cos \angle(e_2, e'_1), \quad (2.207)$$

$$r_{22} = \cos \angle(e_2, e'_2). \quad (2.209)$$

Die Elemente der Drehmatrix sind also die Kosinuswerte der Winkel zwischen den originalen und den gedrehten Koordinateneinheitsvektoren. Dieses Konzept lässt sich direkt auf drei und mehr Dimensionen übertragen: Eine Drehung wird durch eine Matrix beschrieben, die die Kosinuswerte der Winkel zwischen den originalen und den gedrehten Koordinateneinheitsvektoren enthält. So ist die 3d-Drehmatrix durch

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \angle(e_1, e'_1) & \cos \angle(e_1, e'_2) & \cos \angle(e_1, e'_3) \\ \cos \angle(e_2, e'_1) & \cos \angle(e_2, e'_2) & \cos \angle(e_2, e'_3) \\ \cos \angle(e_3, e'_1) & \cos \angle(e_3, e'_2) & \cos \angle(e_3, e'_3) \end{pmatrix} \quad (2.210)$$

definiert. Auch hier stehen in den Spalten der Drehmatrix die gedrehten Koordinateneinheitsvektoren  $e'_1$ ,  $e'_2$ ,  $e'_3$ . Die Kosinuswerte aus (2.206) bis (2.209) und (2.210) werden **Richtungskosinus** genannt. Analog zu Satz 2.8 gilt

### Satz 2.9

Ein 3d-Vektor wird gedreht, indem man ihn von links mit der Drehmatrix aus (2.210) multipliziert.

Da der zu drehende Vektor von links mit der Drehmatrix multipliziert wird, sind bei mehreren aufeinander folgenden Drehungen die entsprechenden Matrizen der Reihe nach *von rechts nach links* zu multiplizieren. Als Beispiel wird in Bild 2.33 zunächst um den Winkel  $\phi$  um die  $z$ -Achse, danach um  $\theta$  um die  $x$ -Achse und schließlich um  $\psi$  um die  $z$ -Achse gedreht. Die daraus resultierende Gesamtdrehung erhält man durch Multiplikation der den Teildrehungen entsprechenden Matrizen in der in Bild 2.33 dargestellten Reihenfolge. Bei den Drehungen um die  $x$ -Achse steht in der ersten Spalte der Vektor  $e_1$ , da dieser Koordinateneinheitsvektor unverändert bleibt. Entsprechend steht bei der Drehung um die  $z$ -Achse in der dritten Spalte der Vektor  $e_3$ . Die anderen Elemente der Drehmatrix entsprechen denen der 2d-Drehmatrix aus Satz 2.8. Umgekehrt entdeckte EULER, dass jede 3d-Drehung durch drei Teildrehungen obiger Art zusammengesetzt werden kann<sup>1</sup>. Daher werden  $\phi$ ,  $\theta$  und  $\psi$  als **Eulersche Winkel** bezeichnet. Die Achsenreihenfolge  $z - x - z$  hat gegenüber der vielleicht suggestiveren Folge  $x - y - z$  den Vorteil, dass sich die Transformation von der gedrehten Lage zurück in die Ausgangslage ohne großen Aufwand in derselben Form darstellen lässt: Mit den Bezeichnungen

<sup>1</sup>Ein Beweis steht zum Beispiel in [FISCHER 2001].

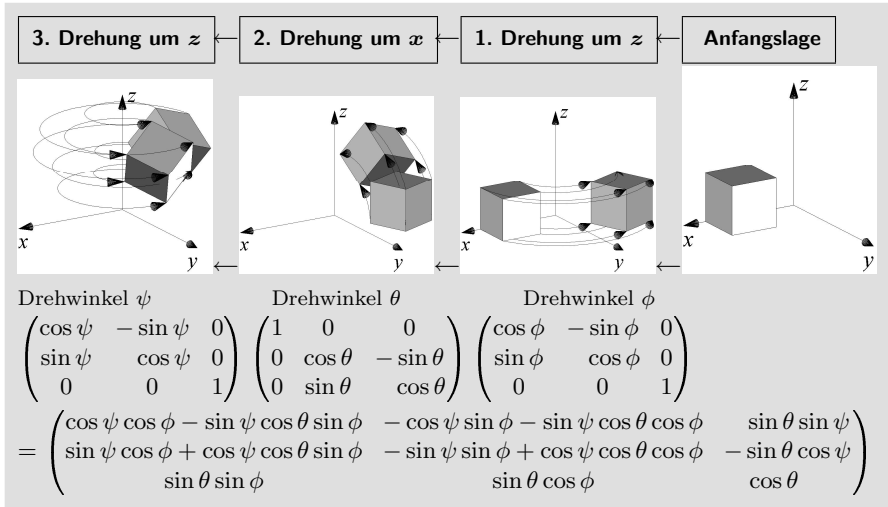


Bild 2.33: EULERSche Winkel

Dreh3d.m

aus Bild 2.33 erhält man diese so genannte **inverse Drehung**, indem man zunächst um  $-\psi$  um die  $z$ -Achse dreht, danach um  $-\theta$  um die  $x$ -Achse und schließlich um  $-\phi$  um die  $z$ -Achse; die Reihenfolge ist also wieder  $z - x - z$ . Neben der hier angesprochenen Zerlegung einer Drehung durch Teildrehungen um  $z - x - z$  bzw.  $x - y - z$  gibt es viele andere Möglichkeiten, Drehungen zu beschreiben, zum Beispiel durch Angabe *einer* (im Allgemeinen mit keiner Koordinatenachse übereinstimmenden) Drehachse und *eines* Drehwinkels. Gebräuchliche Darstellungen und Transformationen zwischen diesen sind in [NITSCHKE, KNICKMEYER 2000] zusammengefasst.

### Beispiel 2.6

Zu der durch  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\sqrt{3} & \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$  definierten Drehung<sup>1</sup> sind die EULERSchen Winkel zu bestimmen.

**Lösung:** Wir vergleichen die Matrix  $\mathbf{R}$  mit der Darstellung aus Bild 2.33. Insbesondere gilt für die Elemente  $r_{32}$  und  $r_{31}$

$$(r_{32} =) \sin \theta \cos \phi = -\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad (r_{31} =) \sin \theta \sin \phi = -\frac{1}{4}. \quad (2.211)$$

<sup>1</sup>Wir setzen hier voraus, dass  $\mathbf{R}$  eine Drehung beschreibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$  und  $\det \mathbf{R} = 1$  ist; vgl. auch (2.218) und Satz 2.10.

Dies sind Polarkoordinaten mit  $r = \sin \theta$  und  $t = \phi$ . Also ist nach (2.97, 2.98) oder mit Taschenrechnerunterstützung [(2.100) mit  $x = r_{32}$ ,  $y = r_{31}$ ]

$$(r =) \sin \theta = \frac{1}{2}, \quad (2.212) \quad (t =) \phi = 210^\circ \text{ oder } -150^\circ. \quad (2.213)$$

Aus

$$(-r_{23} =) \sin \theta \cos \psi = -\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad (r_{13} =) \sin \theta \sin \psi = \frac{1}{4} \quad (2.214)$$

folgt ähnlich [(2.100) mit  $x = -r_{23}$ ,  $y = r_{13}$ ]

$$(r =) \sin \theta = \frac{1}{2}, \quad (2.215) \quad (t =) \psi = 150^\circ. \quad (2.216)$$

Ferner ergibt sich aus  $(r_{33} =) \cos \theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  und  $\sin \theta \stackrel{(2.212)}{=} \stackrel{(2.215)}{=} \frac{1}{2}$  wieder mit (2.97) und ggf. Taschenrechnerunterstützung [(2.100) mit  $x = r_{33}$ ,  $y = \sin \theta$ ] der noch fehlende EULER-Winkel  $\theta = 30^\circ$ . ■

### 🔧 Aufgabe 2.17 (Rotationsmatrix und Eulersche Winkel)

1. Der Vektor  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  wird um  $90^\circ$  um die  $z$ -Achse, danach um  $135^\circ$  um die  $x$ -Achse und schließlich um  $210^\circ$  um die  $z$ -Achse gedreht. Berechnen Sie die Koordinaten des gedrehten Vektors.
2. a) Berechnen Sie die Rotationsmatrix, die entsteht, wenn um  $60^\circ$  um die  $z$ -Achse, danach um  $30^\circ$  um die  $x$ -Achse und schließlich um  $45^\circ$  um die  $z$ -Achse gedreht wird.
- b) Ein Vektor  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  wird wie eben beschrieben gedreht. Wie lauten die Koordinaten des gedrehten Vektors?

$$3. \text{ Berechnen Sie für die Matrix } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{8}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{8}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- a) die EULERSchen Winkel der durch  $\mathbf{R}$  definierten Drehung,
- b) die Determinante  $\det \mathbf{R}$ ,                      c) das Matrizenprodukt  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ .

Das Ergebnis von Aufgabe 2.17,3b ist  $\det \mathbf{R} = 1$ . Das ist kein Zufall. Der absolute Betrag der Determinante ist nach (D1) auf Seite 89 das Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelsatts. Beschreibt  $\mathbf{R}$  eine Drehung, so stehen in den Spalten von  $\mathbf{R}$  die gedrehten Koordinateneinheitsvektoren  $\mathbf{e}'_1$ ,  $\mathbf{e}'_2$ ,  $\mathbf{e}'_3$ . Diese haben die Länge 1 und stehen senkrecht aufeinander; das von ihnen aufgespannte Parallelsatt ist also ein Würfel der Kantenlänge 1 und hat damit das Volumen 1; die Determinante ist also  $\pm 1$ . Da bei einer

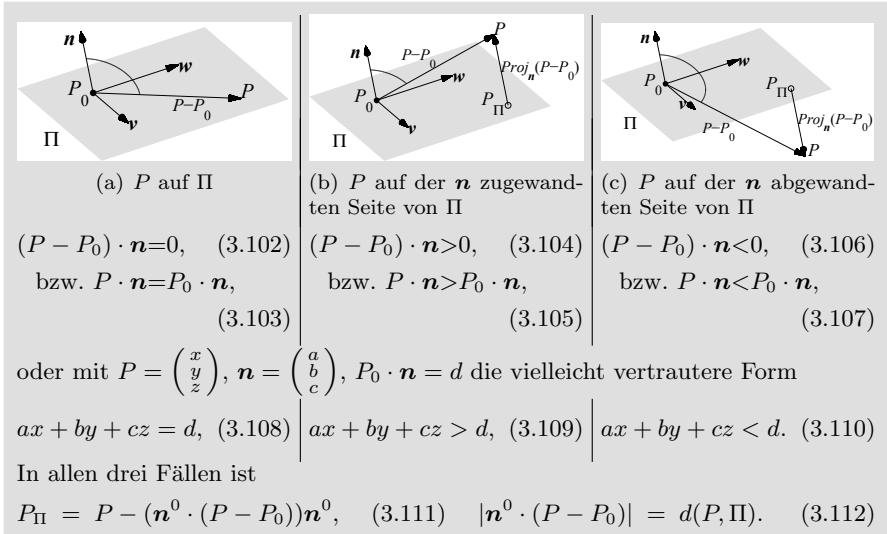


Bild 3.24: HESSEsche Normalform einer Ebene im Raum

◆ Hesse3d.m

Ordnung in eine der Flächen (a) bis (n) aus Bild 3.25 überführen. Die ersten Fälle führen auf einen Punkt (a), eine Gerade (b), eine Ebene (c), zwei Ebenen [(d),(e)], Zylinder [(f) bis (h)] oder Kegel (i). Die Flächen (c) bis (i) sind eben oder lassen sich verzerrungsfrei auf eine Ebene abwickeln; man spricht daher von **abwickelbaren** Quadriken. Alle weiteren Fälle führen auf nicht abwickelbare Flächen; genauer auf Ellipsoide, Paraboloid und Hyperboloid. Wird ein Ellipsoid (j) in Normallage parallel zu einer der Koordinatenebenen  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  oder  $(y, z)$  geschnitten, so entsteht eine Ellipse. Bei den Paraboloiden (k) und (l) führen die Schnitte parallel zur  $(x, z)$ - oder  $(y, z)$ -Ebene auf Parabeln, während die Schnitte parallel zur  $(x, y)$ -Ebene den Typ spezifizieren: Beim elliptischen Paraboloid (k) entstehen Ellipsen; beim hyperbolischen Paraboloid (l, insbesondere zweite Figur) Hyperbeln. Schnitte der Hyperboloiden (m) und (n) parallel zur  $(x, z)$ - oder  $(y, z)$ -Ebene liefern stets Hyperbeln; zur  $(x, y)$ -Ebene parallele Schnitte produzieren dagegen Ellipsen. Bei den elliptischen Quadriken (f),(i),(j),(k) und den Hyperboloiden (m),(n) werden im Fall  $a = b$  die entsprechenden Schnittellipsen zu Kreisen, und die jeweilige Fläche zweiter Ordnung ist rotationssymmetrisch. Eine **Parameterdarstellung** kann in diesen Spezialfällen durch Rotation einer Strecke, Ellipse, Parabel oder Hyperbel gemäß (3.81) gewonnen werden. Beim Hyperboloid entscheidet dabei die Rotationsachse über den Typ der entstehenden Fläche: Rotiert eine wie in Bild 3.14(i) normal liegende Hyperbel um die

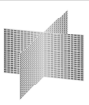



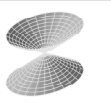
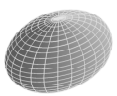
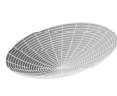

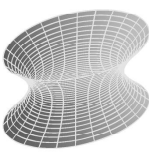
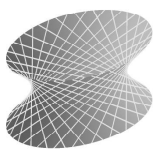
abwickelbare Quadriken	(a) Punkt $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0$	(3.113)
	(b) Gerade $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$	(3.114)
	(c) eine Ebene $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 0$	(3.115)
	(d) zwei parallele Ebenen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$	(3.116)
		(e)
		(f)
		(g)
		(h)
		(i)
	(e) zwei sich schneidende Ebenen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$	(3.117)
Paraboloide, Ellipsoid	(f) Elliptischer Zylinder $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	(3.118)
	(g) Parabolischer Zylinder $x^2 = 2py$	(3.119)
	(h) Hyperbolischer Zylinder $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	(3.120)
	(i) Elliptischer Doppelkegel $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2$	(3.121)
Paraboloide, Ellipsoid		(j)
		(k)
		(l)
	(j) Ellipsoid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	(3.122)
Hyperboloide	(k) Elliptisches Paraboloid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 2z$	(3.123)
	(l) Hyperbolisches Paraboloid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 2z$	(3.124)
Hyperboloide		(m)
		(n)
Hyperboloide	(m) Einschaliges Hyperboloid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	(3.125)
	(n) Zweischaliges Hyperboloid $-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	(3.126)

Bild 3.25: Flächen zweiter Ordnung (Quadriken)



$y$ -Achse, so entsteht ein einschaliges Hyperboloid wie in (m); bei Rotation um die  $x$ -Achse ein zweischaliges wie in (n). Parameter- und Gleichungsdarstellungen für nicht rotationssymmetrische Ellipsoide, Hyperboloide sowie elliptische Paraboloid, Kegel und Zylinder erhält man durch Streckung und/oder Stauchung längs der Koordinatenachsen. Das hyperbolische Paraboloid ist die einzige nicht degenerierte Fläche zweiter Ordnung, die sich nicht durch Streckung/Stauchung einer Rotationsfläche darstellen lässt. Es kann jedoch ebenso wie das einschalige Hyperboloid aus zwei Scharen von Geraden erzeugt werden [(1, dritte Figur) und (m, zweite Figur)]. Deshalb finden sich Anwendungen des einschaligen Hyperboloides wie in Bild 3.19 dargestellt und des hyperbolischen Paraboloides bei Dachflächen (Haus der Kulturen der Welt, Berlin) und Übergangsflächen im Straßenbau. Mehr über Flächen zweiter Ordnung (Anwendungen, Parameterdarstellungen, ...) findet man in [GOTTWALD et al. 1995, BÄR 2001, GIERING, SEYBOLD 1987].

### 3.3 Abstände und Schnitte

#### 3.3.1 Abstand eines Punktes von einer Kurve oder Fläche

Sind  $A$  ein Punkt und  $y$  eine Kurve oder Fläche, so ist der **Abstand**  $d(A, y)$  definiert als der kürzeste Abstand zwischen  $A$  und einem auf  $y$  liegenden Punkt. Ist der Punkt, an dem dieser kürzeste Abstand angenommen wird, eindeutig bestimmt, so bezeichnen wir ihn hier mit  $A_y$ . Ist  $y = g$  eine Gerade  $g$ , so ist  $A_y = A_g$  der **Fußpunkt des Lotes von  $A$  auf  $g$** . Ist  $g$  wie in Bild 3.1(b) durch  $P(t) = P_0 + tv$  parametrisiert, so hat  $A_g$  die Koordinaten

$$A_g \stackrel{\text{Bild 3.26}}{=} P_0 + \text{Proj}_v(A - P_0) \stackrel{(2.55)}{=} P_0 + v^0 v^{0T}(A - P_0) . \quad (3.127)$$

Der **Abstand zwischen dem Punkt  $A$  und der Geraden  $g$**  ist daher

$$d(A, g) = d(A, A_g) \stackrel{(3.127)}{=} |A - P_0 - v^0 v^{0T}(A - P_0)| \quad (3.128)$$

$$\stackrel{(2.36)}{=} \sqrt{|A - P_0|^2 - 2(v^0 \cdot (A - P_0))^2 + |v^0 v^{0T}(A - P_0)|^2} \quad (3.129)$$

$$\stackrel{(2.14)}{=} \stackrel{(2.32)}{=} \sqrt{|A - P_0|^2 - 2(v^0 \cdot (A - P_0))^2 + (v^0 \cdot (A - P_0))^2 |v^0|^2} \quad (3.130)$$

$$\stackrel{|v^0|=1}{=} \sqrt{|A - P_0|^2 - (v^0 \cdot (A - P_0))^2} \quad (3.131)$$

$$\stackrel{(2.165)}{=} V(v^0, A - P_0) \stackrel{(2.162)}{=} |v^0 \times (A - P_0)| . \quad (3.132)$$

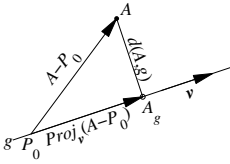


Bild 3.26: Abstand

Punkt  $A \leftrightarrow$ 

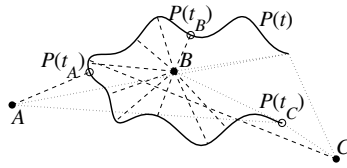
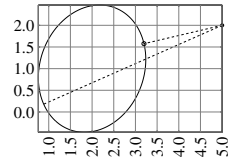
Gerade  $g \blacktriangleleft dAg.m$ 


Bild 3.27: Abstand

Punkt  $A \leftrightarrow$  Kurve  $P(t) \blacktriangleleft dAP.m$ 

Bild 3.28: *Beispiel*

Abstand Punkt  $\leftrightarrow$ 

Ellipse  $\blacktriangleleft BspdAP.m$ 

Etwas komplizierter ist die Situation für den (kürzesten) **Abstand zwischen einem Punkt  $A$  und einer parametrisierten Kurve  $P(t)$** : In Bild 3.27 wird der kürzeste Abstand zwischen dem Punkt  $A$  und der Kurve  $P(t)$  im Punkt  $P(t_A)$  angenommen. Auch hier steht der Verbindungsvektor  $P(t_A) - A$  senkrecht auf der Kurve. Da die Kurvenrichtung durch  $P'(t_A)$  gegeben ist, gilt nach Satz 2.2

$$(A - P(t_A)) \cdot P'(t_A) = 0; \quad (3.133)$$

der Parameter  $t_A$  des  $A$  nächstgelegenen Kurvenpunktes ist also die Lösung dieser Gleichung. Die Lösung ist im Allgemeinen nicht eindeutig; im Extremfall kann es unendlich viele Lösungen geben ( $P(t)$  Kreis,  $A$  dessen Mittelpunkt). Weiter garantiert (3.133) nur, dass die Verbindung zwischen  $A$  und  $P(t_A)$  senkrecht auf der Kurve steht. Wie das Beispiel des Punktes  $B$  aus Bild 3.27 zeigt, kann es mehrere solcher Kurvenpunkte geben, von denen nur einer minimalen Abstand zu  $B$  hat. Das Beispiel des Punktes  $C$  zeigt schließlich, dass bei nicht geschlossenen Kurven der minimale Abstand auch an einem der Randpunkte angenommen werden kann, ohne dass dieser (3.133) erfüllt. *In allen Fällen wird der kürzeste Abstand zwischen Punkt und Kurve in einem der durch (3.133) definierten Punkte (in Bild 3.27 gestrichelt – – – markierte Abstände) oder in einem Randpunkt (in Bild 3.27 punktiert ... markierte Abstände) angenommen.*

### Beispiel 3.5

**Gegeben** sind der Punkt  $A(5; 2)$  sowie eine gegenüber der Normallage um  $70^\circ$  gedrehte und um  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  verschobene Ellipse mit den Halbachsen 1.5 und 1.2 (Bilder 3.3 und 3.28).

**Gesucht** ist der  $A$  nächstgelegene Ellipsenpunkt sowie dessen Abstand zu  $A$ .

**Lösung:** Da die Ellipse eine geschlossene Kurve ist, gibt es hier keine Randpunkte und der minimale Abstand wird an einem Ellipsenpunkt angenommen, der die Gleichung (3.133) erfüllt. Das von (3.18) ausgehende Aufstellen

# Index

## Abstand

- Ellipse  $\leftrightarrow$  Ellipse 136, 138
- EUKLIDISCHER 65, 66
- Fläche  $\leftrightarrow$  Fläche 136
- geodätischer 65, 66
- Gerade  $\leftrightarrow$  Gerade 136
- Kurve  $\leftrightarrow$  Fläche 136
- Kurve  $\leftrightarrow$  Kurve 136
- parallele Geraden 137
- Punkt  $\leftrightarrow$  Ebene 130, 135
- Punkt  $\leftrightarrow$  Ellipse 133
- Punkt  $\leftrightarrow$  Fläche 135, 136
- Punkt  $\leftrightarrow$  Gerade 117, 118, 132, 133, 135
- Punkt  $\leftrightarrow$  Kurve 133
- sphärischer 66, 83
- windschiefe Geraden 136, 137

## abwickelbar 130, 131

## Addition und Subtraktion von Matrizen 56

## Ähnlichkeit 17, 100

## Ähnlichkeitssätze 18

## allgemeine Lage 107, 116, 121, 129, 151, 152

## Altgrad 63, 64

## Ankreismittelpunkt 13

## Antennenausrichtung 111

## $\arctan_2$ 76

## Astronavigation 144

## Asymptoten 121

## **atan2** 76

## Außenwinkel 11

## Aufbauverfahren 157

## Aufpunkt 106, 122

## Aufriss 146

## Augenpunkt 146

## Axonometrie 147, 157, 160, 161

## Azimut 78, 111

## Bewegung 17

## Böschungswinkel 43, 118

## Bogenmaß 63, 64

## Breitengrad 78

## Breitenkreis 81

## Brennpunkt 120

## Brennstrahlen 121

## Brückenprofil 10

## **Cart** 77

## **cart2pol** 76, 78

## **cart2sph** 79

## CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung 63

## CAVALIERISCHES Prinzip 26, 42

## für Kegel 42

## für Zylinder 42

## **cross** 88

## Dach 139

## -ausmittlung 153

## Parallelprojektionen 147

## Axonometrie 160, 161

## Dimetrie 160, 161

## Isometrie 161

## kotierte Projektion

## 152, 153

## Trimetrie 161

## Zweitafelprojektion 154

## rechnerisch 169

## Projektionen 149

## Typen 153

## wahre Gestalt der

## Seitenflächen 156

## Zentralprojektionen 148, 149

## darstellende Geometrie 9, 146

## **DEG**, degree 64

## **det** 85, 90

## Determinanten 85, 90, 92, 98, 100

## -Multiplikationssatz 102

## **diag** 59

## Diagonalelement 59

## Diagonalmatrix 59

## Veranschaulichung 100

## Differenzialgeometrie 15

## Dimetrie 148, 159–161

## DIN A... 22, 24

## Division einer Matrix

## durch einen Skalar 58

## **DMS** 64

## Doppelkegel 124, 131

## Doppelkreiskegel 124

## **dot** 58

## Drachenviereck 14, 16, 19, 68

## Drehmatrix 93–95

## Drehspiegelung 98, 99

## Drehung 17, 93, 95, 99

## inverse 96

## Dreibein 147

## Dreieck 10, 11

## Ähnlichkeitssätze 18

## Ankreise 13

## Außenwinkel 11

## -halbierende 13

## Flächeninhalt 27, 29

## gleichschenkliges 11

## gleichseitiges 11

## Höhe 12, 27

## Höhenschnittpunkt 12, 162

## Inkreis 12, 162

## Innenwinkel 11

## Klassifikation 11

## Kongruenzsätze 18, 162

## SsW und sSW 35

## mit drei rechten Winkeln 13

## Mittelsenkrechte 12

## rechtwinkliges 11, 162

## Schwerpunkt 12, 162

## Seitenhalbierende 12

## spitzwinkliges 11

## stumpfwinkliges 11, 162

## Umkreis 12, 162

## Winkelhalbierende 12

## Dreiecksungleichung 61, 162

## $e_1, e_2, \dots$ 69–71, 86, 91, 147

## Ebene 123, 130

## Einheitsmatrix 60

## Einheitsvektor 60

## Einschneideverfahren 157

## Elevation 78, 111

## Ellipse 118, 119

## Flächeninhalt 127

## Gleichungs-

- darstellung 115, 120
- Parameterdarstellung 106, 107, 121
- Umfang 114
- Ellipsenbogen, Länge 114
- Ellipsenfläche 123
- Ellipsoid 127, 130, 131
  - Volumen 51, 128
- Entwicklungssatz 91
- Erdmessung 9
- erstprojizierend 154
- EUKLID
  - ische Länge 65
  - ische Norm 65
  - ischer Abstand 65, 66
  - ischer Vektorraum 65
- EULERSche Winkel 95, 96
- EULERScher Polyedersatz 52
- Exzentrizität 121
- Exzess 15
- eye** 60
- Fahrradrahmen 10
- FALKSchema 57
- Fass 51
- FEUERBACHkreis 13
- Finite Elemente 11
- Fläche 24, 122
  - Gleichungsdarstellung 129
  - Parameterdarstellung 122
  - Umfang 24
  - zweiter Ordnung 129–132
- Flächeninhalt 24, 25, 40
  - Dreieck 27, 29
  - Ellipse 127
  - Kreis 25, 127
  - Kreissektor 65
  - Paraboloid 128
  - Parallelogramm 26, 84, 88
  - parametrisierte Fläche 126
  - Rechteck 25, 26
  - Rotationsfläche 45
  - Rotationsparaboloid 128
  - Trapez 27
  - Vieleck 29, 30
- Fluchtpunkt 149
- fminsearch** 138
- frei verfügbare Software 6
- freier Vektor 54
- fsolve** 138
- Funktionskurve 118
- Ganghöhe 47
- GAUSS 55
- GAUSSsche Trapez- und Dreiecksformel 30
- gegensinnig 17
- genormte
  - Dimetrie 148, 159–161
  - Isometrie 148, 159, 161
- geodätischer Abstand 65, 66
- geographische Koord. 78, 79
- geometrischer Vektor 54
- Gerade 106, 116, 117
- Geschwindigkeitsvektor 109
- gleichschenkliges Dreieck 11
- gleichseitiges Dreieck 11
- gleichsinnig 17
- Gleichungsdarstellung
  - Ebene 130
  - Ellipse 115, 120
  - Fläche 129
    - zweiter Ordnung 131
  - Funktionskurve 118
  - Gerade 117
  - Hyperbel 120
  - Kreis 114, 115
  - Kugel 129
  - Kurve 114
    - zweiter Ordnung 119
  - Parabel 120
  - Rotationsfläche 129
- Gon und gon 64
- GON**, gon 64
- Grad 63
- Grad und grad 64
- GRAD**, grad 64
- GRASSMANNscher
  - Entwicklungssatz 91
- Großkreis 66, 108, 109
- Großkreisbogen
  - Parameterdarstellung 108, 109
- Grundaufgabe 150
- Grundriss 146, 150, 153
- GULDINSche Regeln 45, 46
- Halbkreissschwerpunkt 49
- Hauptachsen-
  - transformation 122, 129
- Hauptscheitel 120
- Helix 47, 108
- HERONische Formel 29
- HESESche Normalform 116, 117, 130
- Hexaeder 53
- HMS** 64
- Höhe
  - Dreieck 12, 27
  - Kegel 44
  - Parallelogramm 26
  - Trapez 27
  - Zylinder 42
- Höhenlinien 152
- Höhenschnittpunkt 12, 162
- Höhenschnittverfahren 152
- homogene Koord. 103, 149
- Horizontalspur 154
- Hund-Herrchen-Problem 113
- Hyperbel 118–121
- Hyperboloid 124, 130, 131
  - Parameterdarstellung 125
  - Volumen 51
- Hypotenuse 33
- Ikosaeder 53
- Ingenieuraxonometrie 148
- Inkreismittelpunkt 12, 162
- Innenwinkel 11
- inverse Drehung 96
- Isometrie 148, 161
- kartesische Koord. 9, 54, 68, 73
- Kathete 33
- Kavalierperspektive 157, 158
- Kegel 43, 124, 131
  - Mantelfläche 46
  - Parameterdarstellung 123, 125
  - Volumen 44, 51
- Kegelschnitt 118, 119, 122
- Kegelstumpf 124
- Kettenlinie 112
- Körper 40, 122
- komplanar 91
- Kongruenz 17, 99
- Kongruenzsätze 18, 162
  - SsW und sSW 35

- Konoid 51  
konvex 12, 14, 52  
Koordinaten  
  geographische 78, 79  
  homogene 103, 149  
  kartesische 9, 54, 68, 73  
  krummlinige 73  
  parallele 73  
  polare 74, 76  
  rechtwinklige 73  
  schiefwinklige 73  
  -einheitsvektor 69–71, 86, 91  
  -flächen 81  
  -gitter 73  
  -linien 74, 81, 106  
  -transformation 71  
Kosinussatz 34, 62  
kosmischer Körper 53  
Kote 146, 150, 157  
kotierte Projektion 146, 150  
Kreis 19  
  Flächeninhalt 25, 127  
  Gleichungsdarstellung 114, 115  
  Parameterdarstellung 106, 107  
  Umfang 25, 114  
Kreisbogen  
  Länge 65, 114  
  Parameterdarstellung 106, 107  
Kreisfläche 123  
Kreiskegel 123, 124  
Kreiskegelstumpf 124  
Kreissektor  
  Flächeninhalt 65  
Kreiszyylinder 123, 124  
Kreiszyylinderkoordinaten 77  
Kreuzprodukt 88, 90, 91  
Kreuzriss 146, 153  
Krümmung 15  
krummlinige Koord. 73  
Kühlturm 125  
Kugel  
  Gleichungsdarstellung 129  
  Oberfläche 127  
  Parameterdarstellung 123  
  Volumen 48, 51  
Kugelkoordinaten 78, 80  
Kurs 109  
Kurve 106  
  Gleichungsdarstellung 114  
  Parameterdarstellung 106  
  zweiter Ordnung 119, 122  
Kurvenlänge 113  
Länge  
  Ellipsenbogen 114  
  Helix 47  
  Kreisbogen 65, 114  
  Kurve 113  
  Schraublinie 47  
  Vektor 58, 62  
  EUKLIDISCHE 65  
  Rechenregeln 61  
Längengrad 78  
Längenkreis 81  
Landmessung 9  
Leitkurve  
  Konoid 51  
  Translationsfläche 46  
  Translationskörper 46  
Leitlinie 120  
Lineare Algebra 6, 54  
lineare Transformation 99  
Lot auf eine Ebene 150  
Mantelfläche 46, 128  
Mantellinie 43  
MAPLE 55  
MATHCAD 55  
MATHEMATICA 55  
MATLAB 5, 6, 55  
Matrix 54  
  orthogonale 71, 98, 99  
  Rechenregeln 60  
  Veranschaulichung 99–101  
  Verknüpfungsregeln 61  
Mehrtafelprojektion 146  
Meridian 81  
Meter und Seemeile 84  
mgon 64  
Militärperspektive 157, 158  
Milligon 64  
Minute 63, 64  
Mittelpunktswinkel 37, 63  
Mittelsenkrechte 12  
Möndchen des HIPPOKRATES 36  
Multiplikation einer Matrix  
  mit einem Skalar 55  
  mit einer Matrix 57, 58  
  FALKSchema 57  
  Veranschaulichung 102  
MuPAD 55  
Nebenseitel 121  
Neugrad 64  
Neunpunktkreis 13  
Norm 65  
**norm** 59  
Normalenvektor 116, 129  
Normallage 107, 116, 121, 129  
Normalprojektion 148  
Normalschnittebene 151, 154  
normierter Vektor 60  
Nullmatrix 59  
Nullvektor 59  
numerische Exzentrizität 121  
O-Matrix 55  
Oberfläche 24, 40  
  Kugel 127  
  Rotationsfläche 45  
  Torus 45  
Octave 55  
Oktaeder 53  
Ordnern, Ordnungslinie 154  
orientierter Winkel 75, 86  
Orientierung  
  einer Transformation 100  
  und Richtung 56, 60  
  zweier ebener Vektoren 86  
orthogonale  
  Axonometrie 148, 157  
  Matrix 71, 98, 99  
  Parallelprojektion 148  
  Zerlegung 66  
  Zweitafelprojektion 153  
Orthogonalraum 68  
Ortskreis 38–40, 164  
Ortslinien 120  
Ortsvektor 54, 56  
Ox 55  
Papierformat 22, 24  
Parabel 118–121

- Paraboloid 130, 131  
   Flächeninhalt 128  
   Parameterdarstellung 128  
   Volumen 51  
 Parallelkoordinaten 73  
 Parallelogramm 14, 16, 19, 61  
   Flächeninhalt 26, 84, 88  
   Höhe 26  
   Parameterdarstellung 123  
 Parallelprojektion 146, 147  
 Parallelspat 88, 89, 123  
 Parameterbereich 106  
 Parameterdarstellung  
   Ebene 123  
   Ellipse 106, 107, 121  
   Ellipsenfläche 123  
   Ellipsoid 127  
   Fläche 122  
     zweiter Ordnung 132  
 Funktionskurve 118  
 Gerade 106  
 Großkreisbogen 108, 109  
 Helix 109  
 Hyperbel 121  
 Hyperboloid 125  
 Körper 122  
 Kegel 123, 125  
 Kreis 106, 107  
 Kreisbogen 106, 107  
 Kreisfläche 123  
 Kreiskegel 123  
 Kreiszylinder 123  
 Kugel 123, 127  
 Kurve 106  
   zweiter Ordnung 119  
 Parabel 121  
 Paraboloid 128  
 Parallelogramm 123  
 Parallelspat 123  
 Radlinie 113  
 Rotations-  
   fläche 124  
   hyperboloid 125  
   paraboloid 128  
 Schleppkurve 113  
 Schraubfläche 126  
 Schraublinie 109  
 Strahl 106  
 Strecke 106  
 Torus 124  
 Traktrix 113  
 Translationsfläche 125  
 Viertelebene 123  
 Zykloide 113  
 Zylinder 123, 125  
 Pentagondodekaeder 53  
 Peripheriewinkel 37  
 planar 108  
 platonischer Körper 53  
**Pol** 77  
**pol2cart** 76, 78  
 Polarkoordinaten 74, 76  
**polyarea** 31  
 Polyeder 40, 52, 53  
 Polygon 11, 14  
 Polygonzug 11, 14  
**P→R** 76, 78  
 Prisma 42  
   Volumen 42, 51  
 Prismatoid, Prismoid 51  
 Profilkurve 44, 46  
 Projektion 146  
   auf eine Ebene 146, 149  
   auf einen Vektor 67  
 Projektionsmatrix 68, 149  
 projizierend 151, 152  
 Pyramide 43  
   Volumen 44, 51  
 PYTHAGORAS 33  
   Erweiterung für ähnliche  
     Figuren 36  
   Länge  $n$ -dimensionaler  
     Vektoren 58  
   Umkehrung 34  
   Verallgemeinerung  
     (Kosinussatz) 34, 62  
 Quader 41  
 Quadrat 14, 19  
 Quadrik 122, 129, 131  
**RAD** , rad 64  
 Radiant 63, 64  
 Radlinie 112  
 Raum-Zeit-Kontinuum 15  
 Raute 14, 19  
**Rec** 77  
 Rechteck 14, 19  
   Flächeninhalt 25, 26  
 Verformung 10  
 rechtwinklige Koord. 73  
 rechtwinkliges Dreieck 11, 162  
 regelmäßiges Polyeder 53  
 regelmäßiges Vieleck 14  
 reguläres Polyeder 53  
 reguläres Vieleck 14  
 Relativitätstheorie 15  
 Rhombus 14  
 Richtung und Orientierung  
   56, 60  
 Richtungs-  
   vektor 60, 106, 122  
 Richtungskosinus 95  
 Rohrkörper 47  
 Rotation einer Strecke 124  
 Rotations-  
   fläche 44, 45, 124, 129  
   hyperboloid 124, 125  
   körper 44, 45, 48, 128  
   paraboloid 128  
**R→P** 76, 78  
 S-PLUS 55  
 Scheitel 120, 121  
 Scheitelgleichung 121  
 schiefe  
   Axonometrie 148, 157  
   Parallelprojektion 148  
 schiefwinklige Koord. 73  
 Schiff-Hafen-Leuchtturm-  
   Kirche-Problem 40, 164  
 Schleppkurve 113  
 Schnitt  
   allgemein 143  
   Ebene/Ebene 141, 150  
   Ebene/Ebene/Ebene 139  
   Ebene/Gerade 142, 150  
   Gerade/Ebene 142, 150  
   Gerade/Gerade 141  
   Gerade/Kugel 144  
 Schraubfläche 47, 126  
 Schraubkörper 47  
 Schraublinie 47, 108  
 Schraubung 47  
 Schwerpunkt 162  
   Dreieck 12  
   Halbkreis 49  
   Vieleck 31  
 SciLab 55

- Sechspunktekreis 11  
 Seelenradius 45  
 Seemeile und Meter 84  
 Sehne 37  
 Sehnenviereck 37  
 Seitenhalbierende 12  
 Sekunde 63, 64  
 Semiperimeter 29  
 sexagesimale Unterteilung  
     63, 64  
 Skalarprodukt 58  
 sm 84  
 Spatprodukt 88  
 spezielle Lage 151, 152  
**sph2cart** 79  
 sphärischer Abstand 66, 83  
 sphärischer Exzess 15  
 Spiegelung 17, 99  
 spitzwinkliges Dreieck 11  
 Spur 150, 152, 154  
 SsW und sSW 35  
 Standlinie 29  
 Stauchung 100  
 sternförmig 12, 14, 52  
 Sternpunkt 12, 14  
 Strahl 106  
 Strahlensätze 20–22  
 Strecke 106  
 Streckung 100  
 stumpfwinkliges Dreieck 11,  
     162  
 Summe der Innenwinkel 13  
 Tangentenvektor 109  
 tangentielle Komponente  
     112  
 Tangentialebene 135  
 Tetraeder 53  
 THALES 37  
 Torus 45, 124  
 Traktrix 113  
 Transformation, lineare 99  
 Translationsfläche 46, 125  
 Translationskörper 46  
 Transponieren 55  
 Trapez 14  
     Flächeninhalt 27  
     Höhe 27  
 Trapez- und  
     Dreiecksverfahren 29  
 Trimetrie 148, 159, 161  
 überschlagen 14  
 Umfang  
     Ellipse 114  
     Fläche 24  
     Kreis 25, 114  
     Vieleck 24  
 Umfangswinkel 37  
 Umklappung 151, 155  
 Umkreismittelpunkt 12, 162  
 Umlaufsinn 17  
 Vektor 54  
     freier 54  
     geometrischer 54  
     Länge 58, 62  
         EUKLIDISCHE 65  
         Rechenregeln 61  
     normierter 60  
     Rechenregeln 60  
     Verknüpfungsregeln 61  
     -produkt 88, 90, 91  
     -raum 61  
         EUKLIDISCHER 65  
 Veranschaulichung  
     Diagonalmatrix 100  
     Matrix 100  
     Matrizenmultiplikation  
         102  
     orthogonale Matrix 99  
 Verschiebung 17  
 verschränkt 14  
 Vieleck 11, 14  
     Flächeninhalt 29, 30  
     konvex 12, 14  
     mit Selbstüberschneidung  
         14  
     regelmäßiges 14  
     reguläres 14  
     Schwerpunkt 31  
     sternförmig 12, 14  
     Umfang 24  
 Vielflächner 52  
 Viereck 10, 14, 19, 37  
     zu vier Seitenlängen und  
         einem Innenwinkel  
         11  
 Viertelebene 123  
 Vogelperspektive 157, 158  
 Volumen 40  
     Berechnung mittels  
         Schnittflächen 49, 50  
 Ellipsoid 51, 128  
 Fass 51  
 Hyperboloid 51  
 Kegel 44, 51  
 Kugel 48, 51  
 Paraboloid 51  
 Parallelspar 89  
 parametrisierter Körper  
     126  
 Polyeder 52  
 Prisma 42, 51  
 Prismatoid, Prismoid 51  
 Pyramide 44, 51  
 Quader 41  
 Rohrkörper 47  
 Rotationskörper 45, 48  
 Torus 45  
 Translationskörper 46  
 Zylinder 42, 46, 51  
 wahre Gestalt 155  
 wahre Länge 150, 155  
 wahrer Winkel 150, 155  
 windschief 124, 136, 137  
 Winkel, Orientierung 75, 86  
 Winkel zwischen Vektoren  
     62, 63, 86, 88  
 Winkeleinheiten 63  
 Winkelhalbierende 12, 13  
 Winkelsumme 13  
 Würfel als platonischer  
     Körper 53  
 Wulstradius 45  
 Zeichenebene 150  
 Zenit 112  
 Zenitdistanz 80, 144  
 Zentralprojektion 146, 148,  
     149  
 Zentriwinkel 37  
**zeros** 60  
 Zweitafelprojektion 146,  
     153  
 zweitprojizierend 154  
 Zykloide 112  
 Zylinder 41, 124, 131  
     Parameterdarstellung  
         123, 125  
     Volumen 42, 46, 51  
 Zylinderkoordinaten 78