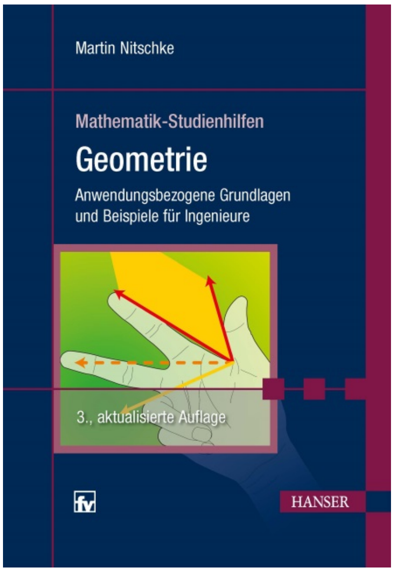
HANSER



Leseprobe

zu

„Geometrie, 3. Auflage“

von Martin Nitschke

ISBN (Buch): 978-3-446-45101-8
ISBN (E-Book): 978-3-446-45333-3

Weitere Informationen und Bestellungen unter
http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-45101-8
sowie im Buchhandel

Vorwort

In so gut wie allen technischen Studiengängen hat die Geometrie ihren Platz; sei es als eigenes Fach, als Teil des Mathematikkurses oder versteckt in anderen Lehrveranstaltungen. Daran ändert auch die zunehmende Leistungsfähigkeit und Verfügbarkeit ausgefeilter CAD-Systeme nichts; CAD ist kein Ersatz, sondern häufig ein Werkzeug und manchmal eine Weiterentwicklung der klassischen Geometrie. Ähnlich wie in den Grundschulen weiterhin das Schreiben mit der Hand unterrichtet wird (obwohl es Textverarbeitungsprogramme gibt), ist die Geometrie Bestandteil jeder Ingenieurausbildung. Der souveräne Umgang mit CAD setzt ein umfangreiches geometrisches Grundwissen voraus. Da dieses nur bei wenigen Studienanfängern vorhanden ist, beginnt die vorliegende Studienhilfe mit einer Auffrischung (bzw. Einführung) einiger Zusammenhänge aus der Schulgeometrie. Danach werden als wesentliches Hilfsmittel zur analytischen Beschreibung Vektoren und Matrizen eingeführt. Damit und mit etwas Analysis lassen sich Kurven, Flächen und Körper darstellen sowie Bogenlängen, Flächeninhalte, Volumina, Abstände und Schnitte berechnen. Abschließend werden einige Grundaufgaben und Projektionen der darstellenden Geometrie behandelt.

Das Buch kann in der vorgegebenen Reihenfolge durchgearbeitet werden. In vielen Fällen wird zum Verständnis ein Zurückblättern erforderlich sein; auf die entsprechende Stelle wird dann durch eine Formel-, Satz-, Bild- oder Aufgabennummer verwiesen. Literatur- und Internethinweise auf tiefer gehende und/oder weiterführende Betrachtungen sind in eckige Klammern [ ] gesetzt und im Literatur- und Internetverzeichnis spezifiziert. Die vorliegende Auflage enthält neben Korrekturen insbesondere aktualisierte Internetangaben. Alle zitierten Webseiten wurden mit dem Dienst WebCite® archiviert, so dass diese zeitlich unbegrenzt auch bei nachträglichen Änderungen und Löschungen in der zitierten Fassung abgerufen werden können.

Bei der Erstellung des Buches wurden das Schriftsatzsystem LaTeX[1] und das mathematische Softwaresystem MATLAB[2] eingesetzt. Sämtliche Bilder wurden mit MATLAB erstellt; die Quelltexte sind im Internet verfügbar. Für Beispiele mit geographischem Bezug wurde zur Darstellung der Kontinentkonturen das frei verfügbare, weltumspannende digitale Höhenmodell [tbase.bin WWW] benutzt.

Diese Studienhilfe basiert auf meinen Lehrveranstaltungen an der Hochschule Neubrandenburg. Nicht zuletzt durch die konstruktive Kritik der

---

[1] Näheres zu LaTeX unter [DANTE WWW].

[2] MATLAB® ist eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks Inc.

Studierenden konnte so manche Ungereimtheit beseitigt werden; herzlichen Dank dafür! Weitere Hinweise und Verbesserungsvorschläge aus dem Leserkreis sind selbstverständlich willkommen; meine E-Mail-Adresse und zusätzliche Informationen zum Buch finden Sie auf der Internetseite GEOMETRIE.HS-NB.DE. Ich danke Kati Blaudzun und Andreas Wehrenpfennig für die mühevolle Arbeit des Korrekturlesens, Frau Fritzsch und Frau Werner für die angenehme und aufmerksame Zusammenarbeit. Ebenso danke ich Herrn Engelmann für die Aufnahme in diese Reihe und viele fachliche Hinweise.

Neubrandenburg, im August 2017 Martin Nitschke

Symbole und Schriftarten

✍ **An diesen Stellen** *ist der Leser eingeladen, zum Stift zu greifen und eine Aufgabe zu lösen. Aufgaben sind grundsätzlich in unmittelbarer Nähe zur Behandlung des jeweiligen Stoffes eingefügt. Dies ermöglicht eine sofortige Verständnisüberprüfung. Am Ende des Buches sind die Lösungen der Aufgaben in Kurzform zusammengestellt; eine ausführlichere Fassung steht auf GEOMETRIE.HS-NB.DE.*

≫ Französische Anführungszeichen markieren mit MATLAB programmierte Beispiele. MATLAB-Schlüsselwörter wie **function** sind fett gedruckt, die Namen vordefinierter Funktionen, wie zum Beispiel **sin**, zusätzlich unterstrichen. Funktionen aus der Symbolic Math Toolbox wie **syms** sind doppelt unterstrichen. Kommentare werden durch ein %-Zeichen eingeleitet und sind hier in Grau gesetzt. `Antworten des MATLAB-Systems sind durch Schreibmaschinenschrift hervorgehoben.` Die vollständige MATLAB-Dokumentation, also insbesondere die Beschreibung der vordefinierten Funktionen, ist sowohl in das MATLAB-System integriert als auch über [MATLAB helpdesk WWW] zugänglich. Eine gute Einführung in MATLAB und eine Übersicht über frei verfügbare Software zur Linearen Algebra sind auf [Gramlich WWW] zu finden. In den Programm-Beispielen dieser Studienhilfe werden MATLAB-Kenntnisse etwa im Umfang der [Gramlich WWW]-Einführung vorausgesetzt. Die MATLAB-Beispiele sollen die Umsetzung des Gelernten in Computerprogramme unterstützen; MATLAB- oder andere EDV-Kenntnisse sind jedoch keine Voraussetzung für das Verständnis dieses Buches. Weiteres zu MATLAB und ähnlichen Produkten ist in Abschnitt 2.1 zu finden.

Das MATLAB-Logo und eine kleinere Schrift verweisen auf die MATLAB-Datei, die zum jeweiligen Bild oder Programm-Listing gehört. Der unter GEOMETRIE.HS-NB.DE abrufbare Quelltext ermöglicht Lesern mit MATLAB-Zugang, das Bild bzw. Programm zu reproduzieren und/oder für den jeweiligen Zweck (Konstruktionsvorlage, Vortragsfolie usw.) zu modifizieren.

Inhaltsverzeichnis

(D1) Der Betrag der Determinante ist das Volumen des von $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ aufgespannten Parallelspats:

$$|\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})| = |[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]| = V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}). \tag{2.167}$$

(D2) Sind $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ *rechtshändig* (also wie in Bild 2.28) orientiert, so ist die Determinante positiv; sonst negativ.

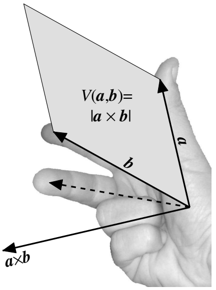


Bild 2.27: Kreuzprodukt

Kreuzprodukt.m

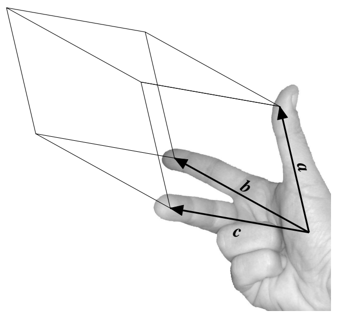


Bild 2.28: Determinante (3d)

det3d.m

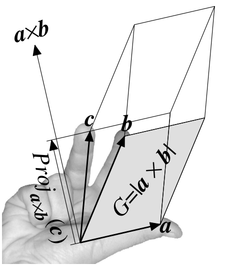


Bild 2.29: Volumen des Parallelspats

Parallelspat.m

Da ein Parallelspat ein spezielles Prisma ist, ist sein Volumen durch die Formel (1.104) gegeben. Ist die Grundfläche das von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannte Parallelogramm, so definiert nach (K2) das Kreuzprodukt $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ eine zur Grundfläche senkrechte Richtung, und die Höhe des Parallelspats ist die Länge der Projektion von $\boldsymbol{c}$ auf $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Nach (K1) ist der Inhalt der Grundfläche gleich $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$. Insgesamt gilt also

$$\boxed{V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})} \overset{(1.104)\text{ und Bild 2.29}}{=} \overset{\text{Grundfläche}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}\ \overset{\text{Höhe}}{|Proj_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{c})|} \tag{2.168}$$

$$\overset{(2.55)}{=} |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\ \Big|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0\big((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0\cdot\boldsymbol{c}\big)\Big| \tag{2.169}$$

$$\overset{(2.32)}{=} |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\ \underbrace{|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0|}_{=1}\ |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0\cdot\boldsymbol{c}| \overset{(2.32)}{=} \Big||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\ \big((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0\cdot\boldsymbol{c}\big)\Big| \tag{2.170}$$

$$\overset{(2.19)}{=} \Big|\big(|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0\big)\cdot\boldsymbol{c}\Big| \overset{(2.12)}{=} \boxed{\Big|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\Big|}\,. \tag{2.171}$$

Sind wie in Bild 2.29 die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ rechtshändig orientiert, so spannen $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ einen spitzen Winkel auf, und das Skalarprodukt $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

ist nach Satz 2.2 positiv. Entsprechend ergeben sich bei nicht rechtshändiger Orientierung ein stumpfer Winkel und ein negatives Skalarprodukt. Deshalb folgt aus (D1), (D2) und (2.171)

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \quad = \quad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \;; \tag{2.172}$$

die Determinante von drei 3d-Vektoren lässt sich also auf die Berechnung von Skalar- und Kreuzprodukt zurückführen. Die Determinante einer 3×3-Matrix ist als die Determinante ihrer Spaltenvektoren definiert:

$$\det \boldsymbol{A} \;=\; \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \;=\; \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{a}_1 \;, & \boldsymbol{a}_2 \;, & \boldsymbol{a}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}. \tag{2.173}$$

≫ Die für 2×2-Matrizen bereits behandelte MATLAB-Anweisung **det**(A) steht für beliebige $n \times n$-Matrizen, also auch für 3×3-Matrizen, zur Verfügung. Bei Determinanten von drei dreidimensionalen Spaltenvektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ ist — wie im Zweidimensionalen — zunächst eine Matrix zu bilden und dann die Determinante zu berechnen: **det**([$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$]).

Die Berechnung der Determinante dreier Vektoren mittels Koordinaten wird in (2.201) behandelt. Ohne zu rechnen, ergeben sich aus geometrischen Überlegungen die folgenden Eigenschaften von Kreuz- und Spatprodukt:

Sind $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2$ dreidimensionale Spaltenvektoren und λ ein Skalar, so gilt:

1. **Antikommutativgesetze**

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \;=\; -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \tag{2.174}$$

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \;=\; -\det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \;=\; -\det(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \;=\; -\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}). \tag{2.175}$$

2. **Kommutativgesetz für zyklische Vertauschung**

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \;=\; \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \;=\; \det(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \tag{2.176}$$

3. **Linearitätsgesetze**

a) **Additivitätsgesetze**

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \times \boldsymbol{b} \;=\; \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}, \tag{2.177}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) \;=\; \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_2. \tag{2.178}$$

$$\det(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \;=\; \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \det(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \tag{2.179}$$

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) \;=\; \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}) + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}), \tag{2.180}$$

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) \;=\; \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1) + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_2). \tag{2.181}$$

b) **Skalare Multiplikativitätsgesetze**

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \tag{2.182}$$

$$\det(\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \lambda \boldsymbol{c}) = \lambda \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}). \tag{2.183}$$

4. a) **Parallelitätskriterium**: $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind genau dann **parallel**, wenn $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ ist. Insbesondere ist

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}. \tag{2.184}$$

b) **Komplanaritätskriterium**: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ sind genau dann **komplanar**, *d.h. in einer Ebene liegend*, wenn $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ ist; insbesondere

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 0. \tag{2.185}$$

5. Für die Koordinateneinheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$ aus (2.62) gilt

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \tag{2.186}$$
$$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \tag{2.187}$$
$$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2, \tag{2.188}$$
$$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3, \tag{2.189}$$
$$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1, \tag{2.190}$$
$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2, \tag{2.191}$$

$$\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = \det(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) = \det(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1, \tag{2.192}$$

$$\det(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = \det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) = \det(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = -1. \tag{2.193}$$

Aus diesen Eigenschaften folgen nun Formeln für die Berechnung des Kreuzprodukts und der Determinante mittels Koordinaten. Für beliebige dreidimensionale Spaltenvektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ gilt:

$$\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}} \overset{(2.63)}{=} (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \tag{2.194}$$

$$\begin{aligned}
\overset{(2.177),(2.178)}{=} \;& a_1b_1\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 + a_1b_2\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + a_1b_3\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 \\
& + a_2b_1\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 + a_2b_2\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 + a_2b_3\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 \\
& + a_3b_1\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 + a_3b_2\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 + a_3b_3\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3
\end{aligned} \tag{2.195}$$

$$\overset{(2.184)}{\underset{(2.186)-(2.191)}{=}} (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3 \tag{2.196}$$

$$\overset{(2.63)}{=} \boxed{\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}} \tag{2.197}$$

Durch eine etwas längere Rechnung folgt daraus der **Entwicklungssatz von Hermann Günter Grassmann (1809–1877):**

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}\,. \tag{2.198}$$

Für die Determinante gilt nun $\boxed{\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})} \overset{(2.172),(2.197)}{=} \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{c}$

$$\overset{(2.4)}{=} (a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3 \tag{2.199}$$

$$= a_2b_3c_1-a_3b_2c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2+a_1b_2c_3-a_2b_1c_3 \tag{2.200}$$

$$\boxed{= a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}\,. \tag{2.201}$$

Auf Pierre Frédéric Sarrus (1798–1861) geht die folgende Merkregel für (2.201) zurück:

Man schreibe die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ spaltenweise nebeneinander und füge rechts daneben noch einmal die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ an: $\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{matrix}$.

Die Determinante ist dann die Summe der Produkte in Richtung der Diagonalen von links oben nach rechts unten vermindert um die Summe der Produkte in Richtung der Diagonalen von links unten nach rechts oben.

Beispiel 2.5

Es ist $\det\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$ zu berechnen.

Lösung: Das Schema $\boxed{\begin{matrix} -1 & 4 & 7 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & -9 & 3 & 6 \end{matrix}}$ ergibt $\det\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-5)\cdot(-9)+4\cdot 8\cdot 3+7\cdot 2\cdot 6-3\cdot(-5)\cdot 7-6\cdot 8\cdot(-1)-(-9)\cdot 2\cdot 4 = \boxed{360}$. ■

Eine Anwendung der Determinanten ist die folgende, zum Beispiel in [Fischer 2002] bewiesene, auf Gabriel Cramer (1704–1752) zurückgehende Regel.

Satz 2.7 (Cramersche Regel)

Sind $\boldsymbol{A}$ eine 2×2- bzw. 3×3-Matrix, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ sowie ggf. $\boldsymbol{a}_3$ die Spaltenvektoren von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ ein weiterer 2×1- bzw. 3×1-Vektor, und ist das Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ eindeutig lösbar,

so ist $\quad x_1 = \dfrac{\det(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_2)}{\det \boldsymbol{A}}, \quad x_2 = \dfrac{\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b})}{\det \boldsymbol{A}}$

bzw. $\quad x_1 = \dfrac{\det(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)}{\det \boldsymbol{A}}, \; x_2 = \dfrac{\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_3)}{\det \boldsymbol{A}}, \; x_3 = \dfrac{\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b})}{\det \boldsymbol{A}}$.

Bemerkung: Die Cramersche Regel gilt allgemeiner für eindeutig lösbare, lineare $n\times n$-Gleichungssysteme. Während sie bei 2×2- und 3×3-Systemen ein praktisches Verfahren für die manuelle Rechnung liefert, ist sie zur numerischen Lösung größerer Systeme wegen des im Allgemeinen hohen Aufwandes nicht geeignet.

✍ **Aufgabe 2.15**

Berechnen Sie die folgenden Kreuzprodukte und Determinanten:

1. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$,
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$,
3. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right)$,
4. $\det \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$,
5. $\det \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1,2,3}$.

2.6 Lineare Transformationen und homogene Koordinaten

2.6.1 Drehungen und allgemeinere lineare Transformationen

Gegeben sind ein 2d-Vektor $\boldsymbol{v} = \binom{v_1}{v_2}$ und ein Winkel α; gesucht ist der Vektor $\boldsymbol{w} = \binom{w_1}{w_2}$, der durch Drehung von $\boldsymbol{v}$ um den Winkel α entsteht. Geeignete Koordinaten zur Lösung dieser Aufgabe sind die aus Abschnitt 2.4.2ff bekannten Polarkoordinaten. Nach (2.95) und (2.96) ist dann

$$\boldsymbol{v} = r\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \tag{2.202}$$

und

$$\boldsymbol{w} \overset{\substack{\text{Bild}\\2.30}}{=} r\begin{pmatrix}\cos(t+\alpha)\\ \sin(t+\alpha)\end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Addi-}\\\text{tions-}\\\text{theo-}\\\text{reme}}}{=} r\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos t - \sin\alpha\sin t\\ \sin\alpha\cos t + \cos\alpha\sin t\end{pmatrix} \tag{2.203}$$

$$\overset{(2.202)}{=} \begin{pmatrix}(\cos\alpha)v_1 - (\sin\alpha)v_2\\ (\sin\alpha)v_1 + (\cos\alpha)v_2\end{pmatrix} \overset{(2.2)}{=} \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\boldsymbol{v}. \tag{2.204}$$

Es gilt also

Satz 2.8

Ein 2d-Vektor wird um einen gegebenen Winkel α gedreht, indem man ihn mit der so genannten **Drehmatrix** $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ von links multipliziert.

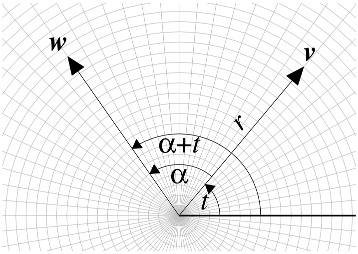


Bild 2.30: Drehung eines Vektors (2d) Drehung2d.m

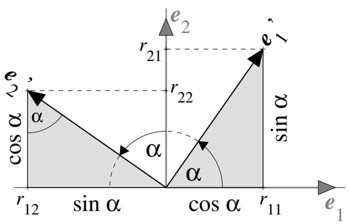


Bild 2.31: Drehmatrix und Richtungskosinus (2d) Drehmatrix2d.m

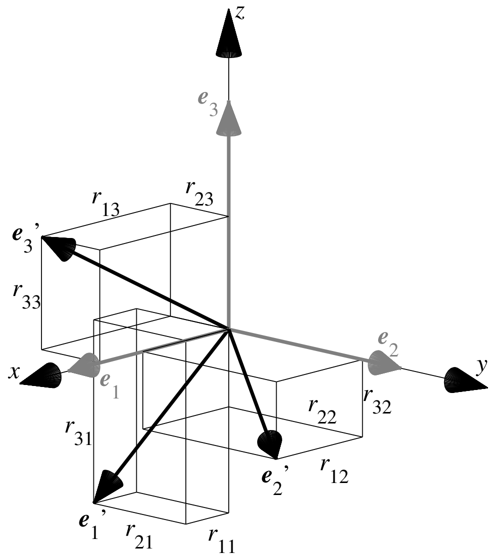


Bild 2.32: Drehmatrix und Richtungskosinus (3d) Drehmatrix3d.m

✍ Aufgabe 2.16

1. *Gegeben sei ein zweidimensionaler Spaltenvektor* $\boldsymbol{v} = \binom{v_1}{v_2}$. *Wie lauten die Koordinaten des Vektors, den man erhält, wenn man* $\boldsymbol{v}$

a) *um* $45°$, b) *um* $90°$, c) *um* $180°$

dreht?

2. *Die aus der Definition* (2.58) *bekannten Koordinateneinheitsvektoren* $\boldsymbol{e}_1$ *und* $\boldsymbol{e}_2$ *werden um einen gegebenen Winkel* α *gedreht. Bestimmen Sie die Koordinaten der gedrehten Vektoren* $\boldsymbol{e}_1'$ *und* $\boldsymbol{e}_2'$.

Wie aus Aufgabe 2.16,2 hervorgeht, stehen in den Spalten der Drehmatrix die Vektoren, die durch Drehung der Koordinateneinheitsvektoren entstehen; vgl. insbesondere die Ergebnisse (L.5) und (L.6). Bezeichnen wir die Drehmatrix mit $\boldsymbol{R}$ und ihre Elemente mit r_{ij}, also

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{2.205}$$

so ergibt sich aus Bild 2.31 und der Beziehung $\pm\sin\alpha = \cos(90^\circ \mp \alpha)$

$$r_{11} = \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_1), \quad (2.206) \qquad r_{12} = \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_2), \quad (2.208)$$

$$r_{21} = \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}'_1), \quad (2.207) \qquad r_{22} = \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}'_2). \quad (2.209)$$

Die Elemente der Drehmatrix sind also die Kosinuswerte der Winkel zwischen den originalen und den gedrehten Koordinateneinheitsvektoren. Dieses Konzept lässt sich direkt auf drei und mehr Dimensionen übertragen: Eine Drehung wird durch eine Matrix beschrieben, die die Kosinuswerte der Winkel zwischen den originalen und den gedrehten Koordinateneinheitsvektoren enthält. So ist die 3d-Drehmatrix durch

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_1) & \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_2) & \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_3) \\ \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}'_1) & \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}'_2) & \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}'_3) \\ \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}'_1) & \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}'_2) & \cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}'_3) \end{pmatrix} \quad (2.210)$$

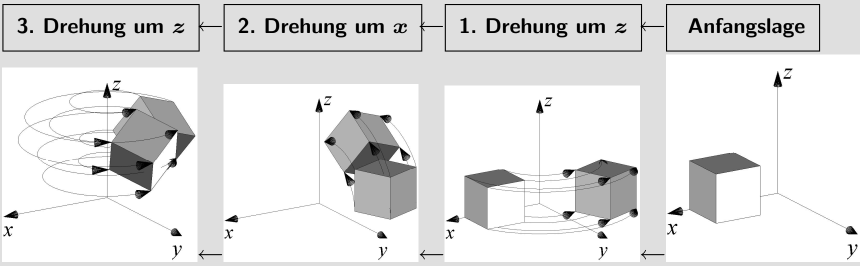
definiert. Auch hier stehen in den Spalten der Drehmatrix die gedrehten Koordinateneinheitsvektoren $\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \boldsymbol{e}'_3$. Die Kosinuswerte aus (2.206) bis (2.209) und (2.210) werden **Richtungskosinus** genannt. Analog zu Satz 2.8 gilt

Satz 2.9

Ein 3d-Vektor wird gedreht, indem man ihn von links mit der Drehmatrix aus (2.210) multipliziert.

Da der zu drehende Vektor von links mit der Drehmatrix multipliziert wird, sind bei mehreren aufeinander folgenden Drehungen die entsprechenden Matrizen der Reihe nach *von rechts nach links* zu multiplizieren. Als Beispiel wird in Bild 2.33 zunächst um den Winkel ϕ um die z-Achse, danach um θ um die x-Achse und schließlich um ψ um die z-Achse gedreht. Die daraus resultierende Gesamtdrehung erhält man durch Multiplikation der den Teildrehungen entsprechenden Matrizen in der in Bild 2.33 dargestellten Reihenfolge. Bei den Drehungen um die x-Achse steht in der ersten Spalte der Vektor $\boldsymbol{e}_1$, da dieser Koordinateneinheitsvektor unverändert bleibt. Entsprechend steht bei der Drehung um die z-Achse in der dritten Spalte der Vektor $\boldsymbol{e}_3$. Die anderen Elemente der Drehmatrix entsprechen denen der 2d-Drehmatrix aus Satz 2.8. Umgekehrt entdeckte Euler, dass jede 3d-Drehung durch drei Teildrehungen obiger Art zusammengesetzt werden kann[1]. Daher werden ϕ, θ und ψ als **Eulersche Winkel** bezeichnet. Die Achsenreihenfolge $z - x - z$ hat gegenüber der vielleicht suggestiveren Folge $x - y - z$ den Vorteil, dass sich die Transformation von der gedrehten Lage zurück in die Ausgangslage ohne großen Aufwand in derselben Form darstellen lässt: Mit den Bezeichnungen

[1] Ein Beweis steht zum Beispiel in [Fischer 2001].



Drehwinkel ψ Drehwinkel θ Drehwinkel ϕ

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & -\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Bild 2.33: EULERsche Winkel Dreh3d.m

aus Bild 2.33 erhält man diese so genannte **inverse Drehung**, indem man zunächst um $-\psi$ um die z-Achse dreht, danach um $-\theta$ um die x-Achse und schließlich um $-\phi$ um die z-Achse; die Reihenfolge ist also wieder $z - x - z$. Neben der hier angesprochenen Zerlegung einer Drehung durch Teildrehungen um $z - x - z$ bzw. $x - y - z$ gibt es viele andere Möglichkeiten, Drehungen zu beschreiben, zum Beispiel durch Angabe *einer* (im Allgemeinen mit keiner Koordinatenachse übereinstimmenden) Drehachse und *eines* Drehwinkels. Gebräuchliche Darstellungen und Transformationen zwischen diesen sind in [NITSCHKE, KNICKMEYER 2000] zusammengefasst.

Beispiel 2.6

Zu der durch $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}+\frac{1}{8}\sqrt{3} & \frac{3}{8}-\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8}-\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4}+\frac{3}{8}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ definierten Drehung[1] sind die EULERschen Winkel zu bestimmen.

Lösung: Wir vergleichen die Matrix $\boldsymbol{R}$ mit der Darstellung aus Bild 2.33. Insbesondere gilt für die Elemente r_{32} und r_{31}

$$(r_{32} =)\ \sin\theta\cos\phi \;=\; -\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad (r_{31} =)\ \sin\theta\sin\phi \;=\; -\frac{1}{4}. \tag{2.211}$$

[1] Wir setzen hier voraus, dass $\boldsymbol{R}$ eine Drehung beschreibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ und $\det \boldsymbol{R} = 1$ ist; vgl. auch (2.218) und Satz 2.10.

Dies sind Polarkoordinaten mit $r = \sin\theta$ und $t = \phi$. Also ist nach (2.97, 2.98) oder mit Taschenrechnerunterstützung [(2.100) mit $x = r_{32}$, $y = r_{31}$]

$$(r =)\sin\theta = \frac{1}{2}, \qquad (2.212) \qquad (t =)\ \boxed{\phi = 210° \text{ oder } -150°}\,. \qquad (2.213)$$

Aus

$$(-r_{23} =)\ \sin\theta\cos\psi = -\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad (r_{13} =)\ \sin\theta\sin\psi = \frac{1}{4} \qquad (2.214)$$

folgt ähnlich [(2.100) mit $x = -r_{23}$, $y = r_{13}$]

$$(r =)\sin\theta = \frac{1}{2}, \qquad (2.215) \qquad (t =)\ \boxed{\psi = 150°}\,. \qquad (2.216)$$

Ferner ergibt sich aus $(r_{33} =)\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\sin\theta \overset{(2.212)}{\underset{(2.215)}{=}} \frac{1}{2}$ wieder mit (2.97) und ggf. Taschenrechnerunterstützung [(2.100) mit $x = r_{33}$, $y = \sin\theta$] der noch fehlende EULER-Winkel $\boxed{\theta = 30°}$. ■

✍ Aufgabe 2.17 (Rotationsmatrix und Eulersche Winkel)

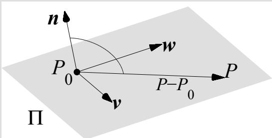
1. *Der Vektor* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *wird um* $90°$ *um die* z*-Achse, danach um* $135°$ *um die* x*-Achse und schließlich um* $210°$ *um die* z*-Achse gedreht. Berechnen Sie die Koordinaten des gedrehten Vektors.*
2. *a) Berechnen Sie die Rotationsmatrix, die entsteht, wenn um* $60°$ *um die* z*-Achse, danach um* $30°$ *um die* x*-Achse und schließlich um* $45°$ *um die* z*-Achse gedreht wird.*

   b) Ein Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *wird wie eben beschrieben gedreht. Wie lauten die Koordinaten des gedrehten Vektors?*
3. *Berechnen Sie für die Matrix* $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{8}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{8}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{8}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{8}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   a) die EULER*schen Winkel der durch* $\boldsymbol{R}$ *definierten Drehung,*

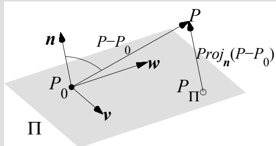
   b) die Determinante $\det \boldsymbol{R}$*,* *c) das Matrizenprodukt* $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$*.*

Das Ergebnis von Aufgabe 2.17,3b ist $\det \boldsymbol{R} = 1$. Das ist kein Zufall. Der absolute Betrag der Determinante ist nach (D1) auf Seite 89 das Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelspats. Beschreibt $\boldsymbol{R}$ eine Drehung, so stehen in den Spalten von $\boldsymbol{R}$ die gedrehten Koordinateneinheitsvektoren $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$. Diese haben die Länge 1 und stehen senkrecht aufeinander; das von ihnen aufgespannte Parallelspat ist also ein Würfel der Kantenlänge 1 und hat damit das Volumen 1; die Determinante ist also ± 1. Da bei einer



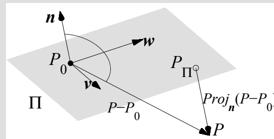
(a) P auf Π

$$(P-P_0)\cdot \boldsymbol{n}=0, \quad (3.102)$$
$$\text{bzw. } P\cdot \boldsymbol{n}=P_0\cdot \boldsymbol{n}, \quad (3.103)$$



(b) P auf der $\boldsymbol{n}$ zugewandten Seite von Π

$$(P-P_0)\cdot \boldsymbol{n}>0, \quad (3.104)$$
$$\text{bzw. } P\cdot \boldsymbol{n}>P_0\cdot \boldsymbol{n}, \quad (3.105)$$



(c) P auf der $\boldsymbol{n}$ abgewandten Seite von Π

$$(P-P_0)\cdot \boldsymbol{n}<0, \quad (3.106)$$
$$\text{bzw. } P\cdot \boldsymbol{n}<P_0\cdot \boldsymbol{n}, \quad (3.107)$$

oder mit $P=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$, $P_0\cdot \boldsymbol{n}=d$ die vielleicht vertrautere Form

$$ax+by+cz=d, \quad (3.108)$$
$$ax+by+cz>d, \quad (3.109)$$
$$ax+by+cz<d. \quad (3.110)$$

In allen drei Fällen ist

$$P_\Pi \;=\; P-(\boldsymbol{n}^0\cdot(P-P_0))\boldsymbol{n}^0, \quad (3.111) \qquad |\boldsymbol{n}^0\cdot(P-P_0)| \;=\; d(P,\Pi). \quad (3.112)$$

Bild 3.24: HESSEsche Normalform einer Ebene im Raum Hesse3d.m

Ordnung in eine der Flächen (a) bis (n) aus Bild 3.25 überführen. Die ersten Fälle führen auf einen Punkt (a), eine Gerade (b), eine Ebene (c), zwei Ebenen [(d),(e)], Zylinder [(f) bis (h)] oder Kegel (i). Die Flächen (c) bis (i) sind eben oder lassen sich verzerrungsfrei auf eine Ebene abwickeln; man spricht daher von **abwickelbaren** Quadriken. Alle weiteren Fälle führen auf nicht abwickelbare Flächen; genauer auf Ellipsoide, Paraboloide und Hyperboloide. Wird ein Ellipsoid (j) in Normallage parallel zu einer der Koordinatenebenen (x,y), (x,z) oder (y,z) geschnitten, so entsteht eine Ellipse. Bei den Paraboloiden (k) und (l) führen die Schnitte parallel zur (x,z)- oder (y,z)-Ebene auf Parabeln, während die Schnitte parallel zur (x,y)-Ebene den Typ spezifizieren: Beim elliptischen Paraboloid (k) entstehen Ellipsen; beim hyperbolischen Paraboloid (l, insbesondere zweite Figur) Hyperbeln. Schnitte der Hyperboloide (m) und (n) parallel zur (x,z)- oder (y,z)-Ebene liefern stets Hyperbeln; zur (x,y)-Ebene parallele Schnitte produzieren dagegen Ellipsen. Bei den elliptischen Quadriken (f),(i),(j),(k) und den Hyperboloiden (m),(n) werden im Fall $a=b$ die entsprechenden Schnittellipsen zu Kreisen, und die jeweilige Fläche zweiter Ordnung ist rotationssymmetrisch. Eine **Parameterdarstellung** kann in diesen Spezialfällen durch Rotation einer Strecke, Ellipse, Parabel oder Hyperbel gemäß (3.81) gewonnen werden. Beim Hyperboloid entscheidet dabei die Rotationsachse über den Typ der entstehenden Fläche: Rotiert eine wie in Bild 3.14(i) normal liegende Hyperbel um die

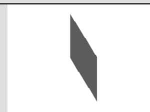
(a) Punkt $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0$ (3.113)

(b) Gerade $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$ (3.114)

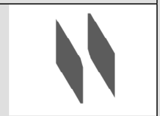
abwickelbare Quadriken

(c) eine Ebene $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 0$ (3.115)

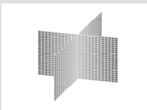
(d) zwei parallele Ebenen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$ (3.116)



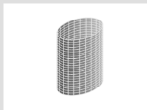
(c)



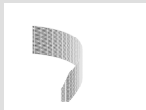
(d)



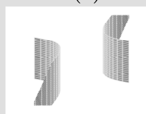
(e)



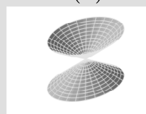
(f)



(g)



(h)



(i)

(e) zwei sich schneidende Ebenen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$ (3.117)

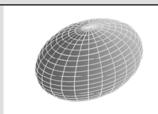
(f) Elliptischer Zylinder $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ (3.118)

(g) Parabolischer Zylinder $x^2 = 2py$ (3.119)

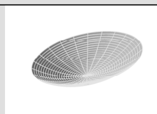
(h) Hyperbolischer Zylinder $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ (3.120)

(i) Elliptischer Doppelkegel $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2$ (3.121)

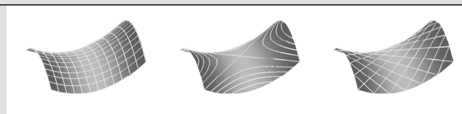
Paraboloide, Ellipsoid



(j)



(k)



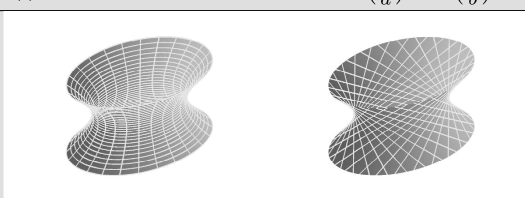
(l)

(j) Ellipsoid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ (3.122)

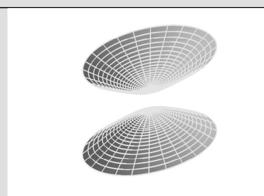
(k) Elliptisches Paraboloid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 2z$ (3.123)

(l) Hyperbolisches Paraboloid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 2z$ (3.124)

Hyperboloide



(m)



(n)

(m) Einschaliges Hyperboloid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ (3.125)

(n) Zweischaliges Hyperboloid $-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ (3.126)

Bild 3.25: Flächen zweiter Ordnung (Quadriken) F2O.m

y-Achse, so entsteht ein einschaliges Hyperboloid wie in (m); bei Rotation um die x-Achse ein zweischaliges wie in (n). Parameter- und Gleichungsdarstellungen für nicht rotationssymmetrische Ellipsoide, Hyperboloide sowie elliptische Paraboloide, Kegel und Zylinder erhält man durch Streckung und/oder Stauchung längs der Koordinatenachsen. Das hyperbolische Paraboloid ist die einzige nicht degenerierte Fläche zweiter Ordnung, die sich nicht durch Streckung/Stauchung einer Rotationsfläche darstellen lässt. Es kann jedoch ebenso wie das einschalige Hyperboloid aus zwei Scharen von Geraden erzeugt werden [(l, dritte Figur) und (m, zweite Figur)]. Deshalb finden sich Anwendungen des einschaligen Hyperboloides wie in Bild 3.19 dargestellt und des hyperbolischen Paraboloides bei Dachflächen (Haus der Kulturen der Welt, Berlin) und Übergangsflächen im Straßenbau. Mehr über Flächen zweiter Ordnung (Anwendungen, Parameterdarstellungen, ...) findet man in [Gottwald et al. 1995, Bär 2001, Giering, Seybold 1987].

3.3 Abstände und Schnitte

3.3.1 Abstand eines Punktes von einer Kurve oder Fläche

Sind A ein Punkt und y eine Kurve oder Fläche, so ist der **Abstand** $d(A, y)$ definiert als der kürzeste Abstand zwischen A und einem auf y liegenden Punkt. Ist der Punkt, an dem dieser kürzeste Abstand angenommen wird, eindeutig bestimmt, so bezeichnen wir ihn hier mit A_y. Ist $y = g$ eine Gerade g, so ist $A_y = A_g$ der **Fußpunkt des Lotes von** A **auf** g. Ist g wie in Bild 3.1(b) durch $P(t) = P_0 + t\boldsymbol{v}$ parametrisiert, so hat A_g die Koordinaten

$$A_g \overset{\substack{\text{Bild}\\3.26}}{=} P_0 + Proj_{\boldsymbol{v}}\,(A - P_0) \overset{(2.55)}{=} P_0 + \boldsymbol{v}^0 \boldsymbol{v}^{0\,\mathrm{T}} (A - P_0)\ . \qquad (3.127)$$

Der **Abstand zwischen dem Punkt** A **und der Geraden** g ist daher

$$d(A, g) = d(A, A_g) \overset{(3.127)}{=} |A - P_0 - \boldsymbol{v}^0 \boldsymbol{v}^{0\,\mathrm{T}} (A - P_0)| \qquad (3.128)$$

$$\overset{(2.36)}{=} \sqrt{|A - P_0|^2 - 2(\boldsymbol{v}^0 \cdot (A - P_0))^2 + |\boldsymbol{v}^0 \boldsymbol{v}^{0\,\mathrm{T}} (A - P_0)|^2} \qquad (3.129)$$

$$\overset{\substack{(2.14)\\(2.32)}}{=} \sqrt{|A - P_0|^2 - 2(\boldsymbol{v}^0 \cdot (A - P_0))^2 + (\boldsymbol{v}^0 \cdot (A - P_0))^2 |\boldsymbol{v}^0|^2} \qquad (3.130)$$

$$\overset{|\boldsymbol{v}^0|=1}{=} \sqrt{|A - P_0|^2 - (\boldsymbol{v}^0 \cdot (A - P_0))^2} \qquad (3.131)$$

$$\overset{(2.165)}{=} V(\boldsymbol{v}^0, A - P_0) \overset{(2.162)}{=} |\boldsymbol{v}^0 \times (A - P_0)|\ . \qquad (3.132)$$

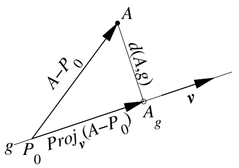


Bild 3.26: Abstand Punkt $A \leftrightarrow$ Gerade g dAg.m

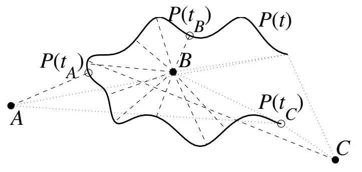


Bild 3.27: Abstand Punkt $A \leftrightarrow$ Kurve $P(t)$ dAP.m

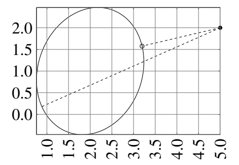


Bild 3.28: *Beispiel* Abstand Punkt $\leftrightarrow$ Ellipse BspdAP.m

Etwas komplizierter ist die Situation für den (kürzesten) **Abstand zwischen einem Punkt A und einer parametrisierten Kurve** $P(t)$: In Bild 3.27 wird der kürzeste Abstand zwischen dem Punkt A und der Kurve $P(t)$ im Punkt $P(t_A)$ angenommen. Auch hier steht der Verbindungsvektor $P(t_A)-A$ senkrecht auf der Kurve. Da die Kurvenrichtung durch $P'(t_A)$ gegeben ist, gilt nach Satz 2.2

$$(A - P(t_A)) \cdot P'(t_A) \quad = \quad 0; \qquad (3.133)$$

der Parameter t_A des A nächstgelegenen Kurvenpunktes ist also die Lösung dieser Gleichung. Die Lösung ist im Allgemeinen nicht eindeutig; im Extremfall kann es unendlich viele Lösungen geben ($P(t)$ Kreis, A dessen Mittelpunkt). Weiter garantiert (3.133) nur, dass die Verbindung zwischen A und $P(t_A)$ senkrecht auf der Kurve steht. Wie das Beispiel des Punktes B aus Bild 3.27 zeigt, kann es mehrere solcher Kurvenpunkte geben, von denen nur einer minimalen Abstand zu B hat. Das Beispiel des Punktes C zeigt schließlich, dass bei nicht geschlossenen Kurven der minimale Abstand auch an einem der Randpunkte angenommen werden kann, ohne dass dieser (3.133) erfüllt. *In allen Fällen wird der kürzeste Abstand zwischen Punkt und Kurve in einem der durch* (3.133) *definierten Punkte* (in Bild 3.27 gestrichelt – – – markierte Abstände) *oder in einem Randpunkt* (in Bild 3.27 punktiert $\cdots$ markierte Abstände) *angenommen.*

Beispiel 3.5

Gegeben sind der Punkt $A(5;2)$ sowie eine gegenüber der Normallage um 70° gedrehte und um $\binom{2}{1}$ verschobene Ellipse mit den Halbachsen 1.5 und 1.2 (Bilder 3.3 und 3.28).

Gesucht ist der A nächstgelegene Ellipsenpunkt sowie dessen Abstand zu A.

Lösung: Da die Ellipse eine geschlossene Kurve ist, gibt es hier keine Randpunkte und der minimale Abstand wird an einem Ellipsenpunkt angenommen, der die Gleichung (3.133) erfüllt. Das von (3.18) ausgehende Aufstellen

Index