

Oswald Giering

# **Vorlesungen über höhere Geometrie**

unter Mitwirkung von Johann Hartl

Mit zahlreichen Aufgaben, Figuren und Tabellen



Friedr. Vieweg & Sohn      Braunschweig/Wiesbaden

## INHALTSVERZEICHNIS

<b>KAPITEL 1. PROJEKTIVER RAUM ÜBER EINEM VEKTORRAUM</b>	
1A. Begriff des projektiven Raumes . . . . .	1
1B. $k$ -Ebenen . . . . .	4
1C. Dimensionsformel und Folgerungen . . . . .	10
1D. Projektive Koordinaten . . . . .	11
1E. Koordinatendarstellungen der $k$ -Ebenen. . . . .	16
<b>KAPITEL 2. PROJEKTIVE ABBILDUNGEN, KOLLINEATIONEN</b>	
2A. Begriff der projektiven Abbildung. . . . .	20
2B. Eigenschaften projektiver Abbildungen. . . . .	23
2C. Koordinatendarstellungen projektiver Abbildungen . .	27
2D. Projektivitäten, projektive Gruppe . . . . .	31
2E. Kollineationen . . . . .	37
<b>KAPITEL 3. DUALITÄTSPRINZIP, KORRELATIONEN</b>	
3A. Dualitätsprinzip der projektiven Räume . . . . .	42
3B. Koordinatendarstellungen des Dualitätsprinzips . .	46
3C. Korrelationen. . . . .	51
<b>KAPITEL 4. QUADRIKEN</b>	
4A. Begriff der Quadrik. . . . .	52
4B. Koordinatendarstellungen der Quadriken . . . . .	54
4C. Klassifikation der Quadriken, Normalformen, Quadrikinvarianten . . . . .	55
4D. $k$ -Ebenen und Quadriken . . . . .	65
4E. Polarentheorie der Quadriken . . . . .	72
4F. Weitere Quadrikeneigenschaften . . . . .	80
4G. Quadriken mit Außen- und Innengebiet . . . . .	91
4H. Dualisierung der Quadriken . . . . .	95
<b>KAPITEL 5. GEOMETRIE ALS INVARIANTENTHEORIE EINER GRUPPE</b>	
5A. Geometrie-Modelle und ihre Transformationsgruppen. .	101
5B. Absolutfigur, Schauplatz, Ordnungsprinzip. . . . .	103
5C. Übertragungen, Geometrien. . . . .	106
<b>KAPITEL 6. CAYLEY/KLEIN-RÄUME</b>	
6A. Begriff des Cayley/Klein-Raumes. . . . .	110
6B. Koordinatendarstellungen der Absolutfiguren. . . . .	113

6C. Entartete und nichtentartete Cayley/Klein-Räume. . . . .	116
6D. In k-Ebenen induzierte Cayley/Klein-Räume. . . . .	121
6E. Dualisierung der Absolutfiguren. . . . .	129
6F. Dreidimensionale Cayley/Klein-Räume. . . . .	135
6G. Cayley/Klein-Ebenen. . . . .	137
6H. Polsimplexe der Absolutfiguren . . . . .	139
<b>KAPITEL 7. ÄHNLICHKEITEN UND BEWEGUNGEN AUF CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN</b>	
7A. F-Projektivitäten, Ähnlichkeits- und Bewegungs-invarianten. . . . .	146
7B. Ähnlichkeiten und Bewegungen mit Fixpunkten. . . . .	154
7C. Ähnlichkeits- und Bewegungsgruppen . . . . .	156
7D. Projektivspiegelungen, Streckungen . . . . .	161
7E. Ergänzungen. . . . .	163
(1.Hyperbolische Räume 163, 2.Semieuklidische Räume 165)	
<b>KAPITEL 8. ABSTANDS- UND WINKELMETRIKEN IN CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN</b>	
8A. Geraden und Absolutfiguren . . . . .	166
8B. Abstands- und Winkelmetriken . . . . .	169
8C. Ergänzungen. . . . .	183
(1.Hyperbolische Räume 183, 2.Elliptische Räume 184, 3.Euklidische und pseudoeuklidische Räume 184, 4.Isotrope Räume 188)	
8D. Strecken und Sektoren. . . . .	189
<b>KAPITEL 9. K-EBENEN IN CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN</b>	
9A. k-Ebenen und Absolutebenen . . . . .	194
9B. Totalpolare einer regulären k-Ebene. . . . .	196
9C. Koordinatendarstellungen der Totalpolaren einer regulären k-Ebene. . . . .	198
9D. Orthogonalität in Cayley/Klein-Räumen. . . . .	201
9E. Ergänzungen. . . . .	209
(1.Hyperbolische Räume 209, 2.Elliptische Räume 210, 3.Quasi-hyperbolische und quasielliptische Räume 211, 4.Euklidische und pseudoeuklidische Räume 212)	
<b>KAPITEL 10. PROJEKTIVE NICHTSTANDARDMODELLE VON CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN</b>	
10A. Bündelmodelle. . . . .	216
10B. Gegenpunktmodelle auf Ovalquadriken, duale Modelle .	218
10C. Geraden-Modell der hyperbolischen Ebene. . . . .	219
10D. Geraden-Modell des hyperbolischen Raumes $P^5_{13}$ . . . .	223
10E. Matrizen-Modell des hyperbolischen Raumes $P^3_{12}$ . . . .	234

## KAPITEL 11. KINEMATISCHE MODELLE VON CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN

- 11A. Kinematisches Modell des elliptischen Raumes  $P_{10}^3$  . . . . . 236  
 11B. Kinematisches Modell des hyperbolischen Raumes  $P_{14}^7$  . . . . . 240  
 11C. Kinematisches Modell des quasielliptischen Raumes  $P_{2100}^3$  . . . . . 244

## KAPITEL 12. CLIFFORD-PARALLELITÄT IN ELLIPTISCHEN RÄUMEN

- 12A. Historische Motivation . . . . . 253  
 12B. Vorbereitungen . . . . . 257  
 12C. Erzeugendenscharen der Absolutquadrik. . . . . 261  
 12D. (1,q-1)-Reguli, Clifford-parallele (q-1)-Ebenen. . . . . 264  
 12E. Clifford-Reguli. . . . . 269  
 12F. Zur Transitivität der Clifford-Parallelität. . . . . 273

## KAPITEL 13. LORENTZ-RAUM UND SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

- 13A. Galilei-Transformationen und Galilei-Raum  $P_{11|000}^4$  . . . . . 276  
 13B. Lichtausbreitung . . . . . 278  
 13C. Minkowski-Welt, Lorentz-Transformationen . . . . . 279  
 13D. Minkowski-Welt und Lorentz-Raum  $P_{1|01}^4$  . . . . . 282  
 13E. Spezielle Lorentz-Transformationen . . . . . 284

KAPITEL 14. CAYLEY/KLEIN-GEOMETRIEN IN NICHTENTARTETEN  
CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN

- 14A. Vorbemerkungen über Cayley/Klein-Geometrien. . . . . 288  
 14B. Hyperbolische Geometrie. . . . . 290  
     (1.Grundbegriffe 290, 2.Parallelkegel 296, 3.Fundamentalflächen 299, 4.Kongruenzsätze 303, 5.Trigonometrie 306, 6.Blick in die Literatur 307)  
 14C. Möbius-Geometrie . . . . . 311  
     (1.Grundbegriffe 311, 2.Orthogonalität 315, 3.Möbius-Bündel 315, 4.Blick in die Literatur 316)  
 14D. Elliptische Geometrie. . . . . 316  
     (1.Grundbegriffe 316, 2.Orthogonalität 318, 3.Dualitätsprinzip 320, 4.Blick in die Literatur 321)  
 14E. Projektive Liniengeometrie, Plücker-Geometrie. . . . . 323  
     (1.Grundbegriffe 323, 2.Blick in die Literatur 325)  
 14F. Lie-Geometrie. . . . . 326  
     (1.Grundbegriffe 326, 2.Blick in die Literatur 326)

KAPITEL 15. CAYLEY/KLEIN-GEOMETRIEN IN ENTARTETEN  
CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN

- 15A. Laguerre-Geometrien. . . . . 327  
     (1.Grundbegriffe 327, 2.Blick in die Literatur 330)  
 15B. Quasielliptische Geometrien. . . . . 330  
     (1.Grundbegriffe 331, 2.Blick in die Literatur 333)  
 15C. Euklidische und pseudoeuklidische Geometrien, iso-

trope Geometrien, Galilei- und Flaggen-Geometrien . . .	333
(1.Grundbegriffe 333, 2.Blick in die Literatur 334)	
<b>KAPITEL 16. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN CAYLEY/KLEIN-GEOMETRIEN</b>	
16A. Bewegungsgruppe $B_{ q_0-1}^n$ als Faktorgruppe der Bewegungsgruppe $B_{ q_0}^{n+1}$ . . . . .	336
16B. Bewegungsgruppe $B_{ q_0}^n$ als Faktorgruppe der Bewegungsgruppe $B_{ q_0}^{n+1}$ . . . . .	339
16C. Bewegungsgruppe $B_{n q_0-10}^n$ als Untergruppe der Bewegungsgruppe $B_{ q_0}^{n+1}$ . . . . .	342
<b>KAPITEL 17. NICHTSTANDARDMODELLE DER CAYLEY/KLEIN-GEOMETRIEN</b>	
17A. Projektive Nichtstandardmodelle. . . . .	346
(1.Involutionen-Modell der ebenen hyperbolischen Geometrie 346, 2.Gegenpunktmodell der Möbius-Geometrie 349)	
17B. Modelle von Cayley/Klein-Geometrien in Cayley/Klein-Räumen . . . . .	350
(1.Modelle der hyperbolischen Geometrie im euklidischen Raum 350, 2.Modelle der Möbius-Geometrie im euklidischen Raum 356, 3. Modelle der elliptischen Geometrie im euklidischen Raum 358, 4.Modelle der Laguerre-Geometrien im euklidischen Raum 360, 5.Modelle der quasielliptischen Geometrien im euklidischen Raum 369, 6.Modelle der Galilei-Geometrien im zugeordneten pseudoeuklidischen Raum 370)	
<b>KAPITEL 18. STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION</b>	
18A. Begriff der stereographischen Projektion . . . . .	372
18B. Koordinatendarstellungen . . . . .	375
18C. Stereographische Projektion der Sphären. . . . .	379
18D. Ergänzungen im $P^2$ und $P^3$ . . . . .	383
<b>KAPITEL 19. INVERSION</b>	
19A. Begriff der Inversion, Koordinatendarstellung. . . . .	390
19B. Eigenschaften der Inversion. . . . .	392
19C. Kugelbündel. . . . .	396
<b>KAPITEL 20. KONFORME NICHTSTANDARDMODELLE</b>	
20A. Konforme Modelle der hyperbolischen Geometrie. . . . .	398
(1.Poincaré-Modell 398, 2.Varianten des Poincaré-Modells 401, 3.Anwendungen 407)	
20B. Konformes Modell der Möbius-Geometrie. . . . .	408
(1.Grundbegriffe 408, 2.Orthogonalität 412, 3.Anwendung 413)	
20C. Konformes Modell der elliptischen Geometrie. . . . .	414
20D. Konformes Modell der Lie-Geometrie . . . . .	419
20E. Konforme Modelle der Laguerre-Geometrien . . . . .	425

---

<b>KAPITEL 21. LOKALE KURVENTHEORIE IN CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN</b>	
21A. Kurvenbegriff, Schmieg-k-Ebenen. . . . .	431
21B. Begleitsimplex der Hauptkurven . . . . .	435
21C. Invariante Parametrisierung der Hauptkurven. . . . .	438
21D. Ableitungsgleichungen. . . . .	443
21E. Ergänzungen. . . . .	452
(1.Hyperbolische Räume 452, 2.Elliptische Räume 453, 3.Quasi-hyperbolische und quasielliptische Räume 453, 4.Euklidische und pseudoeuklidische Räume 455, 5.Flaggenräume 455)	
<b>KAPITEL 22. LOKALE HYPERFLÄCHENTHEORIE IN CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN</b>	
22A. Hyperflächenbegriff. . . . .	457
22B. Flächenkurven, Tangentenhyperebenen. . . . .	461
22C. Hauptflächen . . . . .	465
22D. Abstandsmetrik der Hauptflächen, erste Grundformen. .	471
22E. Begleitsimplex der Hauptflächen. . . . .	479
22F. Ergänzungen. . . . .	483
(1.Hyperbolische Räume 483, 2.Elliptische Räume 484, 3.Quasi-elliptische Räume, 4.Euklidische und pseudoeuklidische Räume 485, 5.Isotrope Räume 485, 6.Flaggenräume)	
22G. Ableitungsgleichungen der Hauptflächen . . . . .	486
22H. Zweite Grundform der Hauptflächen. . . . .	497
22I. Winkelmetrik der Hauptflächen, dritte Grundformen. .	505
22J. Oberfläche einer Hauptfläche, Betrag der Gauß-Krümmung . . . . .	509
22K. Ergänzungen. . . . .	514
(1.Nichtentartete Cayley/Klein-Räume 514, 2.Euklidische Räume 515)	
22L. Normalkrümmung, Meusnier-Formeln . . . . .	517
<b>KAPITEL 23. BLICK IN DIE DIFFERENTIALGEOMETRISCHE LITERATUR</b>	
23A. Nichtentartete Cayley/Klein-Räume. . . . .	526
23B. Einfach entartete Cayley/Klein-Räume . . . . .	532
23C. Mehrfach entartete Cayley/Klein-Räume. . . . .	534
23D. Anwendungen der Cayley/Klein-Räume . . . . .	535
<b>LITERATURVERZEICHNIS. . . . .</b>	538
<b>SACHVERZEICHNIS . . . . .</b>	593