HANSER

Leseprobe

Hans-Jochen Bartsch

Taschenbuch mathematischer Formeln für Ingenieure und Naturwissenschaftler

ISBN (Buch): 978-3-446-43800-2

ISBN (E-Book): 978-3-446-43735-7

Speziell: $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x,\ x \in \mathrm{D}(f)$ und $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x,\ x \in \mathrm{D}(f^{-1})$

Es gilt: $g \circ f \neq f \circ g$ (nicht kommutativ)

Bei drei Funktionen: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (assoziativ)

♦ **Beispiele**

(1) g: $g(u) = u^2$ $\quad f$: $f(x) = 1 - \cos^4 x = u$
$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \big(1 - \cos^4 x\big)^2$

(2) $g(u) = \sqrt{u}$, $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathrm{W}(g) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ und
$f(x) = \cos x = u$, $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{W}(f) = [-1, 1]$
Die Bedingung für eine Verkettung $\mathrm{W}(f) \cap \mathrm{D}(g) \neq \emptyset$ ist erfüllt.
$g \circ f = \sqrt{\cos x}$ existiert für $\mathrm{D}(g \circ f) = \{x \mid \cos x \geq 0\}$ ♦

7.3 Grenzwerte, unbestimmte Ausdrücke

7.3.1 Grenzwert einer Funktion [1)]

> Eine reelle Funktion f, die in der Umgebung von x_0, evtl. mit Ausnahme von x_0 definiert ist, hat an der Stelle x_0 den *Grenzwert* (*Limes*) $L \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn es zu jeder beliebigen reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\delta > 0$ derart gibt, sodass für alle $x \in \mathrm{D}(f)$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - L| < \varepsilon$
>
> Schreibweisen: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ oder $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = L$

Im Allgemeinen hängt δ von ε ab: $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Alternative Definition

Für jede gegen x_0 konvergierende Folge (x_n) mit $x_n \neq x_0$ und $x_n \in \mathrm{D}(f)$ strebt die Folge der zugehörigen Funktionswerte $\big(f(x_n)\big)$ gegen denselben Grenzwert L.

♦ **Beispiel**

Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ist an der Stelle $x = 1$ nicht definiert. Wählt man aber eine „Anschleichfolge“ (x_n) mit Gliedern, die sich der kritischen Stelle 1 immer weiter annähern (sie aber nie betreten), stellt man mit einem einfachen Taschenrechnertest fest, dass die zugehörigen Funktionswerte $f(x_n)$ immer

[1)] Grenzwert einer Folge siehe 2.4.2

näher an die Zahl 2 heranrücken, was zu der Vermutung $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ Anlass gibt. Durch Faktorisierung des Zählers wird diese Vermutung zur Gewissheit:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \qquad \blacklozenge$$

Einseitige Grenzwerte einer Funktion

L ist *rechtsseitiger* (*linksseitiger*) *Grenzwert*, wenn die Funktionswerte für x von oben gegen x_0, (x von unten gegen x_0) der Zahl L beliebig nahe kommen. Der Definitionsbereich enthält rechts (links) die Umgebung von x_0.

Schreibweisen

Rechtsseitiger Grenzwert, $x > x_0$

$$L^+ = L_r = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{x\searrow x_0} f(x)$$

$$= f(x_0+0) = f(x_0+)$$

Linksseitiger Grenzwert, $x < x_0$

$$L^- = L_l = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{x\nearrow x_0} f(x)$$

$$= f(x_0-0) = f(x_0-)$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert sind genau dann gleich L, wenn der Grenzwert der Funktion gleich L ist:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

Rechnen mit Grenzwerten

Unter der Voraussetzung, dass die in den Regeln auftretenden Grenzwerte existieren, gelten die *Grenzwertsätze* ($a, c \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) \qquad \mathrm{D} = \mathrm{D}(f) \cap \mathrm{D}(g)$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \qquad \mathrm{D} = \mathrm{D}(f) \cap \mathrm{D}(g)$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(c \cdot f(x)\big) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \qquad \text{für } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} \qquad \lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^n = \Big(\lim_{x\to x_0} f(x)\Big)^n$$

7

$$\lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim_{x\to x_0} f(x)} \qquad \lim_{x\to x_0}\big(\log_a f(x)\big) = \log_a\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L| \qquad \text{gilt nicht umgekehrt!}$$

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) \qquad f \text{ stetige Funktion}$$

Gilt: $\forall x \in U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$: $g(x) < f(x) < h(x)$ und

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$, so folgt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ (*Zangenregel*)

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Uneigentliche Grenzwerte

> Eine reelle Funktion f, die in der Umgebung von x_0, evtl. mit Ausnahme von x_0 definiert ist, hat an der Stelle x_0 den *uneigentlichen Grenzwert* ∞ genau dann, wenn es zu jeder noch so großen reellen Zahl $M > 0$ eine reelle Zahl $\delta > 0$ derart gibt, sodass für alle $x \in \mathrm{D}(f)$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt: $f(x) > M$
>
> Schreibweisen: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ oder $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = \infty$

Analog für den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$.

Geometrische Deutung

Die Funktion hat bei $x = x_0$ eine *senkrechte Asymptote* (griech. „Nicht-Zusammenfallende“).

♦ **Beispiele**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$ ♦

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

> Eine Funktion f hat für $x \to \infty$ den *Grenzwert* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, wenn für jede *Folge der Urbilder* (x_n) mit $x_n \to \infty$, $x_n \in \mathrm{D}(f)$ die Folge der Bilder $\big(f(x_n)\big)$ denselben Grenzwert L hat. Analog für $x \to -\infty$.

Siehe auch 8.3.1.7 (Asymptoten).