

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

ix

1. Motivation

1

Das lineare Proportionalitätsgesetz aus Physik und Ökonomie sowie seine Darstellung durch Tabellen. Lösung eines linearen Gleichungssystems durch Manipulieren des Koeffizientenschemas. Die Grundlagen der Matrizenrechnung und ihr Beitrag zum Gauss'schen Algorithmus. Die elementare Vektorrechnung gegründet auf die Konstruktionslehre der Synthetischen Geometrie.

- 1.1. Die lineare Proportionalität 1
- 1.2. Das lineare Gleichungssystem 6
- 1.3. Die elementare Matrizenrechnung 10
- 1.4. Die Geometrie der Euklidischen Ebene 21

2. Lineare Räume

31

Entwicklung der Koordinatendarstellung linearer Räume aus ihrer axiomatischen Grundlegung: Austauschprinzip, Basis, Dimension. Die direkte Summe und die lineare Unabhängigkeit. Die Grassmann'sche Dimensionsformel. Existenz einer Basis. Verwendung des Gauss-Jordan'schen Verfahrens zur rechnerischen Bestimmung der linearen Unabhängigkeit von Vektoren, der Dimension von Teilräumen und der Inversen. Der Rang einer Matrix.

- 2.1. Die definierenden Axiome 31
- 2.2. Die lineare Unabhängigkeit 38
- 2.3. Der Gauss-Jordan Algorithmus 51

3. Die lineare Abbildung

66

Beziehung der Linearität von Abbildungen zur Struktur der unterlegten Vektorräume. Der Isomorphiesatz und das Übertragungsprinzip für lineare Räume. Die algebraische Struktur und die Matrixdarstellung von $\text{Hom}(X, Y)$. Koordinatentransformationen.

Aut(X) als Automorphismengruppe von End(X), invariante Gesetzmässigkeiten und die Variablensubstitution als Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme.

3.1. Die grundlegenden Eigenschaften	66
3.2. Das Zusammensetzen linearer Abbildungen	71
3.3. Die Matrizenform linearer Abbildungen	78

4. Die linearen Gleichungen 95

Die drei fundamentalen Auffassungen eines linearen Gleichungssystems. Allgemeine und partikuläre Lösungen, homogene und inhomogene Systeme, lokale und globale Existenzkriterien und Eindeutigkeitskriterien für die Lösungen. Vollständige numerische Lösungen mit dem Gauss'schen Verfahren, Rundungs- und Stabilitätsprobleme. Die UDO-Zerlegung. Die Fredholm'sche Alternative. Lösung mit dem Cramer'schen Verfahren für $n \leq 3$. Die Grassmann'sche Determinantenfunktion und ihre Koordinatendarstellung. Die Determinante einer linearen Abbildung und ihrer Matrixform. Der Laplace'sche Entwicklungssatz, die Determinantenformel der Inversen, der Determinantentest für lineare Unabhängigkeit. Determinantenberechnung für spezielle Matrizen. Ihre Vereinfachung mithilfe des Gauss'schen Algorithmus.

4.1. Die Problemstellung	95
4.2. Das Lösen linearer Gleichungssysteme	100
4.3. Die Determinante	111

5. Die affine Geometrie 133

Der affine Raum der Anschauung, sein Tangentenraum, die affine Basis und Dimension. Die Parallelität. Affine Koordinatendarstellung und Parameterdarstellung eines m -Flachs. Das Teilverhältnis. Affine Abbildungen, der Isomorphiesatz und das Übertragungsprinzip der affinen Geometrie. Die Gruppe der affinen Transformationen eines Vektorraumes und ihre Struktur. Die Abbildungsgeometrie nach dem "Erlanger Programm". Das m -Simplex und der Schwerpunktsbegriff. Das Parallelepiped und die Determinantenfunktion als Volumbegriff. Die Orientierung.

5.1. Die affine Mannigfaltigkeit	133
5.2. Die affine Abbildungsgeometrie	143

6. Die linearen Funktionale 160

Im Hauptsatz der Dualitätstheorie findet man die(kanonischen)Isomorphismen von X auf X^ und X^{**} sowie die Darstellungsformeln für Vektoren mit Hilfe dualer Basispaare. Fundamentale Eigenschaften des Annulators werden auf die Beschreibung von Hyperebenen und der Lösungsmannigfaltigkeiten von Gleichungssystemen angewandt; geometrische Deutung des Gauss'schen Verfahrens. Die Transponierte. Einige Fredholm'sche Alternativen. Anwendung der Dualität auf die geometrische Behandlung linearer Ungleichungen: Polyeder, Kegel, Trennungssatz und Darstellbarkeit mit Hilfe der Extrempunkte. Die Fredholm'sche Alternative für Ungleichungen wird gegeben. Das zentrale Thema der Ungleichungstheorie ist der Dualitätssatz von J.v. Neumann und eine Skizze des Simplexverfahrens.*

6.1. Die Dualitätstheorie	160
6.2. Die linearen Ungleichungen	176
6.3. Zur Lösbarkeit linearer Ungleichungssysteme	187

7. Die metrischen Strukturen 198

Auf dem Skalarprodukt wird die metrische Dualitätstheorie aufgebaut. Metrischer Fundamentaltensor, Cauchy-Schwarz- und Minkowski-Ungleichung, Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren. Die orthogonalen und selbstadjungierten Abbildungen, sowie die orthogonalen Projektoren werden vorgestellt. Die metrische Geometrie wird auf die Ähnlichkeitstransformationen gegründet. Der metrische Volumbegriff und drei grundlegende Winkelbegriffe dienen als Beispiel geometrischer Objekte. Der Spiegelungsbegriff führt zur Cholesky-, QR- und Polarzerlegung sowie zum Tridiagonalisierungsverfahren für Matrizen. Die Behandlung der Bilinearformen schlägt eine Brücke von den Skalarprodukten zu den Endomorphismen. Punktspiegelungen werden behandelt und damit die vollständige affine und metrische Klassifikation von Quadriken gegeben. Die Hauptachsengleichung verweist schon auf die Eigenwerttheorie. Bemerkungen zur indefiniten und symplektischen Geometrie schliessen dieses Kapitel ab.

7.1. Die metrische Dualitätstheorie	198
7.2. Die metrische Geometrie	211
7.3. Die Quadriken	226

8. Die Rolle der komplexen Zahlen 239

Im Geiste des "Erlanger Programms" wird eine auf die Gruppentheorie gestützte geometrische Konstruktion der komplexen Zahlen und der Quaternionen gegeben. Die Theorie komplexer linearer Räume wird skizziert. Anschliessend findet man den für die Deutung der Eigenwerttheorie wichtigen Zusammenhang zwischen komplexen und reellen Vektorräumen. Die Nullstellensätze für Polynomfunktionen werden zitiert und auf ihre Bedeutung für die Lineare Algebra hin untersucht.

8.1. Die komplexe Lineare Algebra	239
8.2. Die komplexen Polynomfunktionen	248

9. Die Reduktionstheorie 253

Die Untersuchungen zur Spektraltheorie werden am Beispiel eines dynamischen Systems motiviert. Es werden drei äquivalente Definitionen für das Spektrum vorgestellt und der Zusammenhang zwischen der Reduktionstheorie reeller Operatoren und ihrer Komplexifizierung geklärt. Als Anwendung folgt der Satz über die Quasitriangulierbarkeit reeller und die Triangulierbarkeit komplexer Endomorphismen. Die metrische Reduktionstheorie des vektorraumtheoretischen Spektrumsbegriffs führt zur Diagonalisierung (bzw. Quasidiagonalisierung) der Matrixform von selbstadjungierten und normalen Abbildungen durch orthogonale Transformationen. Diese Ergebnisse werden mit Hilfe des abbildungstheoretischen Begriffs des Spektrums in $\text{End}(X)$ neu formuliert und gipfeln im Spektralsatz für normale Operatoren, Funktionenkalkül, Wurzelziehen und der komplexen Polarzerlegung. Das algebraisch erklärte Spektrum wird verwendet,

um die affine Reduktionstheorie bis zur Jordan'schen Zerlegung zu entwickeln. Affine Diagonalisierbarkeit, halbeinfache und nilpotente Endomorphismen, algebraische und geometrische Multiplizitäten, Wurzelräume, Jordan'sche Normalform.

9.1. Das Spektrum	253
9.2. Der Spektralsatz	258
9.3. Die Jordan-Zerlegung	270

Anhänge

A. Grundlegende algebraische Rechengesetze	277
B. Die wichtigsten Grundbegriffe der Mengenabbildung	280
C. Hilberts Axiomatik der Euklidischen Geometrie	282

Literaturverzeichnis	287
--------------------------------	-----

Sachverzeichnis	291
---------------------------	-----