

Inhaltsverzeichnis

I Von der geometrischen zur logisch-mengentheoretischen Evidenz	11
§ 1. Axiomatisierung der Geometrie im Altertum	11
1. Die Mathematik als Lehre vom Raum und von der Zahl bei den Griechen	11
2. Die Axiomatisierung der Geometrie durch Euklid	13
3. Die Evidenz der empirischen und der logischen Aussagen	17
4. Die Problematik der geometrischen Evidenz	20
§ 2. Moderne Axiomatik der Geometrie	23
1. Abschluss der Axiomatisierung der Geometrie durch Hilbert	23
2. Die Uminterpretierung der Axiome	27
3. Die Möglichkeit Nicht-Euklidischer Geometrien	28
4. Affine und projektive Inzidenzgeometrie	31
§ 3. Modelle von Axiomensystemen	34
1. Relationsgebilde	34
2. Modelle geometrischer Axiomensysteme	35
3. Modelle für Nicht-Euklidische Geometrien	40
4. Die Forderungen an ein Axiomensystem	42
§ 4. Der Strukturbegriff	46
1. Erweiterung eines Axiomensystems durch Definitionen	46
2. Äquivalente Axiomensysteme für die einfachsten Relationsgebilde	47
3. Äquivalente Axiomensysteme für algebraische Gebilde	50
4. Mathematik ist die Lehre von den Strukturen	54
§ 5. Entwicklung und Präzisierung der Analysis	58
1. Die reellen und die komplexen Zahlen	58
2. Zurückführung der Euklidischen Geometrie auf die Analysis	63
3. Die Analysis im Frühstadium	65
4. Präzisierung der Analysis	68
§ 6. Zurückführung der reellen Zahlen auf die natürlichen Zahlen	71
1. Erweiterung von Strukturen	71
2. Konstruktion der rationalen Zahlen aus den natürlichen Zahlen	72
3. Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen	74
4. Konstruktion der komplexen Zahlen; hyperreelle Zahlen	77
II Der Triumph der Mengenlehre	79
§ 7. Zurückführung der natürlichen Zahlen auf die Mengenlehre	79
1. Das Axiomensystem von Peano; Induktion und Rekursion	79
2. Die Gesetze der natürlichen Zahlen	83
3. Mengentheoretische Modelle für das Axiomensystem von Peano	84
4. Anhang; Ungelöste Probleme der Zahlentheorie	86

§ 8. Die Cantorsche naive Mengenlehre	89
1. Mathematik ist Mengenlehre	89
2. Paradoxe Erscheinungen bei unendlichen Mengen	91
3. Abzählbare Mengen	93
4. Die Mächtigkeit des Kontinuums	95
§ 9. Der Vorstoss ins Transfinite	99
1. Transfinite Prozesse	99
2. Das Universum der reinen Mengen	102
3. Die Ordinalzahlen	104
4. Transfinite Arithmetik	106
§ 10. Klassische Aussagenlogik	108
1. Die Entwicklung der mathematischen Logik	108
2. Algebra der Logik	109
3. Die Gesetze der Aussagenlogik	114
4. Anhang: Schaltalgebra	118
§ 11. Prädikatenlogik	121
1. Elementare Prädikatenlogik	121
2. Klassen- und Relationenlogik	128
3. Höhere Prädikatenlogik	133
4. Das Programm des Logizismus	134
III Die Problematik der logisch-mengentheoretischen Evidenz und der Weg zum Formalismus	137
§ 12. Einwände gegen die naive Mengenlehre	137
1. Gibt es aktuell unendliche Mengen?	137
2. Gilt das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten auch für unendliche Gesamtheiten?	140
3. Sind imprädikative Definitionen legitim?	142
4. Die Problematik des Auswahlprinzips	144
§ 13. Die Antinomien	147
1. Paradoxien, Trugschlüsse und Antinomien	147
2. Logisch-mengentheoretische Antinomien	150
3. Andere Formen der Russellschen Antinomie	154
4. Die semantischen Antinomien	156
§ 14. Die Antworten auf die Antinomien	161
1. Revision des naiven Standpunktes der klassischen Mathematik	161
2. Typentheorie	163
3. Axiomatische Mengenlehre	165
4. Intuitionismus und Operativismus	172
§ 15. Formalismus	177
1. Das Hilbertsche Programm der Metamathematik	177
2. Axiomatisierung und Formalisierung der elementaren Prädikatenlogik	179

3. Formale mathematische Theorien	184
4. Semantische und syntaktische Begriffe	190
§ 16. Algorithmen und Kalküle	194
1. Der intuitive Algorithmus- und Kalkülbegriff	194
2. Berechenbarkeit	198
3. Präzisierungen des Begriffs der Berechenbarkeit	201
4. Entscheidungsprobleme formaler Theorien	206
§ 17. Die Gödelschen Sätze über die Vollständigkeit und die Widerspruchsfreiheit formaler Systeme	209
1. Die logische Vollständigkeit der elementaren Prädikatenlogik	209
2. Die Unvollständigkeit der Arithmetik	211
3. Weitere Mängel formaler Systeme	216
4. Die Möglichkeit Nicht-Cantorscher Mengenlehren	220
§ 18. Philosophische Probleme der modernen Grundlagenforschung	224
1. Ist die Grundlagenkrise überwunden?	224
2. Der Finslersche Platonismus	225
3. Das Begründungsproblem der Mathematik und der Logik	227
4. Mathematik und Metaphysik	229
Weiterführende Literatur	233
Sachverzeichnis	235