

KAPITEL 15. DER VEKTORRAUM \mathbb{R}^N

Einleitung	1
§ 1 Der \mathbb{R}^n und seine anschaulichen Deutungen im Falle n=2 und n=3	1
Anschauliche Deutungen des \mathbb{R}^3	2
§ 2 Lineare Funktionen und ihre Niveaumengen	6
Der Graph linearer Funktionen	7
Niveaumengen	8
§ 3 Geraden und Ebenen	9
Geraden als Durchschnitt zweier Ebenen	13
Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene	15
§ 4 Unterräume des \mathbb{R}^n	16
Der Unterraum $N_0(f)$	16
Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	20
Basis und Dimension	22
Zusammenfassung	25

KAPITEL 16. DAS SKALARPRODUKT

Einleitung	27
§ 1 Definition und elementare Eigenschaften des Skalarproduktes	27
§ 2 Die Länge von Vektoren	28
Kugeln und Sphären im \mathbb{R}^n	29
Die Ungleichung von Cauchy und Schwarz	30
§ 3 Orthogonalität von Vektoren des \mathbb{R}^n	32
Orthonormalbasen	33
§ 4 Normalenvektoren zu Hyperebenen des \mathbb{R}^n	34
Die Methode der kleinsten Quadrate in der Ausgleichsrechnung	38
§ 5 Winkelmessung im \mathbb{R}^n	41
Projektionen	43
§ 6 Anhang: Skalarprodukt auf \mathbb{C}^n	45
Zusammenfassung	46

KAPITEL 17. DAS VEKTORPRODUKT

Einleitung	48
§ 1 Definition und Eigenschaften des Vektorproduktes	48

Ein Beispiel aus der Elektrizitätslehre	51
Ein Beispiel aus der Mechanik	52
§ 2 Das Spatprodukt	53
§ 3 Das Spatprodukt als Determinante	55
§ 4 Geometrische Anwendungen von Vektor- und Spatprodukt	58
Zusammenfassung	60

KAPITEL 18. MATRIZEN

Einleitung	61
§ 1 Definition einer Matrix	62
Die Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems	64
Gleichungssystem als Matrizengleichung	65
§ 2 Lineare Abbildungen	66
§ 3 Matrizenmultiplikation	73
§ 4 Addition und S-Multiplikation für Matrizen	76
§ 5 Der Rang einer Matrix	78
Spaltenrang und Zeilenrang einer Matrix	78
Elementare Spalten- und Zeilenumformungen	80
Zusammenfassung	83

KAPITEL 19. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Einleitung	85
§ 1 Begriffserklärungen	85
§ 2 Ein Lösungsverfahren	87
Elementare Zeilenumformungen	89
Die Zeilennormalform	90
Der Gauß-Jordan-Algorithmus	91
§ 3 Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus	
zur Lösung linearer Gleichungssysteme	94
Ein Lösbarkeitskriterium	94
Die Lösungen	97
§ 4 Homogene und inhomogene Systeme	100
§ 5 Eine weitere Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus	102
Berechnung der inversen Matrix	102
§ 6 Anhang: Fixpunkte linearer Abbildungen	105
Zusammenfassung	106

KAPITEL 20. DETERMINANTEN

Einleitung	108
§ 1 Definition und Eigenschaften	108
Der Entwicklungssatz	109
Berechnung von Determinanten	111
§ 2 Invertierbare Matrizen	114
Invertierbarkeits-Kriterium und Produktsatz	114
Inversen-Berechnung	115
Die Cramersche Regel	116
Zusammenfassung	117

KAPITEL 21. DIFFERENTIATION IM \mathbb{R}^N

Einleitung	119
§ 1 Funktionen im \mathbb{R}^n	120
Beispiele	120
Veranschaulichung	121
§ 2 Partielle Differenzierbarkeit	123
Partielle Funktionen	123
Offene Mengen	124
Partielle Ableitungen	125
§ 3 Stetigkeit	127
Folgen im \mathbb{R}^n	127
Stetige Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	129
Stetige Vektorfelder	130
§ 4 Partielle Differenzierbarkeit und Stetigkeit	132
Stetig partiell differenzierbare Funktionen	132
Ein Spezialfall der Kettenregel	133
Partiell differenzierbare Vektorfelder	134
Der Gradient	135
§ 5 Geometrie	136
Kurven und Tangenten	136
Richtungsableitungen	139
Gradient und Niveaumengen	141
§ 6 Totale Differenzierbarkeit	144
Lineare Approximation stetig partiell differenzierbarer Funktionen	144
Total differenzierbare Vektorfelder	148
Die Kettenregel	149
Zusammenfassung	152

KAPITEL 22. ANWENDUNGEN DER DIFFERENTIALRECHNUNG IM \mathbb{R}^N

Einleitung	154
§ 1 Höhere partielle Ableitungen	154
Rotation, Divergenz, Laplace-Operator	156
Die Taylor-Formel	160
§ 2 Lokale Extrema	162
Notwendige Bedingung	162
Hinreichende Bedingung	164

Extrema unter Nebenbedingungen	168
§ 3 Nicht-lineare Gleichungssysteme	172
Eindeutige Auflösbarkeit	172
Implizite Funktionen	174
Zusammenfassung	177
 KAPITEL 23. KURVENINTEGRAL UND POTENTIAL	
Einleitung	179
§ 1 Gerichtete Kurven	180
Parameterwechsel	181
§ 2 Das Kurvenintegral	183
Arbeit	183
Definition des Kurvenintegrals	184
Rechenregeln für Kurvenintegrale	186
§ 3 Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen und Potential	188
Der Hauptsatz für Kurvenintegrale	188
Potentiale und ihre Konstruktion	192
§ 4 Bogenlänge und Kurvenintegrale über Skalarfelder	198
Definition der Bogenlänge	198
Kurvenintegrale über Skalarfelder	200
Zusammenfassung	202
 KAPITEL 24. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	
Einleitung	203
§ 1 Definitionen und theoretische Grundlagen	203
Richtungsfeld	204
Anfangswertproblem	205
§ 2 Existenz- und Eindeutigkeitsfragen	207
Näherungsverfahren	207
Der Satz von Picar-Lindelöf	209
§ 3 Spezielle Differentialgleichungen	211
erster Ordnung	211
Separable Differentialgleichungen	211
Einführung neuer Variablen	212
Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung	214
Bernoulli'sche und Riccati'sche Differentialgleichung	217
Exakte Differentialgleichungen	219
Kurze Zusammenfassung	222
§ 4 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	223
Lösung der inhomogenen Differential- gleichung	225
Randwertprobleme	228
Zusammenfassung	228
Lösungen der Aufgaben	231
Sachverzeichnis	313