Am Anfang stand die Algebra

1

In diesem Kapitel ...

- Sich mit Vorzeichen und Klammern anfreunden
- Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz kennenlernen
- Mit Brüchen und Prozenten rechnen
- Potenzen, Wurzeln und Logarithmen lieben lernen
- Mehr als einen Term ausmultiplizieren

Einmal ganz von vorn. Dieses Kapitel behandelt die Grundlagen der Algebra. All diese Ausdrücke und Aufgabenstellungen sind Ihnen in Ihrem Leben – oder auch nur im Mathematikunterricht – sicherlich über den Weg gelaufen. Haben Sie sich noch nie so richtig mit ihnen anfreunden können? Oder ist Ihre Freundschaft ein bisschen eingerostet? Kein Problem. Dieses Kapitel bietet Ihnen die wunderbare Möglichkeit, sich wieder kennenzulernen.

Mit Vorzeichen rechnen

In diesem Abschnitt erfahren Sie, wie man Zahlen mit Vorzeichen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert, egal, ob alle Zahlen das gleiche Vorzeichen haben oder ob sie gemischt vorkommen.

Zahlen mit Vorzeichen addieren und subtrahieren

Eins plus eins ergibt zwei. Diese wohlbekannte Rechnung ist das Paradebeispiel für eine Addition von zwei positiven Zahlen. Auch wenn Sie sich noch nie darüber Gedanken gemacht haben, es gilt allgemein:

$$(+a) + (+b) = +(a + b)$$

Die Addition zweier negativer Zahlen funktioniert ähnlich. Sie schuldeten Claudia schon sechs Euro und mussten sich noch einmal fünf Euro ausleihen. Nun schulden Sie ihr elf Euro.

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

Wenn die Vorzeichen zweier Zahlen unterschiedlich sind, kann man die Zeichen erst einmal außer Acht lassen und zunächst die Differenz der beiden Zahlen ermitteln. Das ist die Differenz zwischen ihren Beträgen (wobei der Betrag einer Zahl die Zahl ohne ihr Vorzeichen ist). Die Zahl, die weiter von 0 entfernt ist, legt das Vorzeichen der Lösung fest.

$(+a) + (-b) = +(|a| - |b|),$ wenn das positive a weiter von 0 entfernt ist

$(+a) + (-b) = -(|b| - |a|),$ wenn das negative b weiter von 0 entfernt ist

Und zum Schluss die Rechenregeln für die Subtraktion: Verwandeln Sie die Subtraktion in eine Addition und schon haben Sie die Aufgabe gelöst.

$(+a) - (+b) = (+a) + (-b)$

$(+a) - (-b) = (+a) + (+b)$

$(-a) - (+b) = (-a) + (-b)$

$(-a) - (-b) = (-a) + (+b)$

Zahlen mit Vorzeichen multiplizieren und dividieren

Multiplikation und Division von Zahlen mit Vorzeichen sind wirklich sehr einfach – vorausgesetzt, Sie können multiplizieren und dividieren. Die Regeln sind nicht nur leicht, sondern für beide Rechenarten außerdem die gleichen.

Beim Multiplizieren und Dividieren von Zahlen mit Vorzeichen gilt: Wenn beide Vorzeichen gleich sind, ist das Ergebnis *positiv*; wenn die beiden Vorzeichen unterschiedlich sind, ist das Ergebnis *negativ*:

$$(+a) \cdot (+b) = +ab(+a)/(+b) = +(a/b)$$
$$(+a) \cdot (-b) = -ab(+a)/(-b) = -(a/b)$$
$$(-a) \cdot (+b) = -ab(-a)/(+b) = -(a/b)$$
$$(-a) \cdot (-b) = +ab(-a)/(-b) = +(a/b)$$

Algebraische Eigenschaften – eine Skizze

Die Mathematiker haben die Regeln und Eigenschaften in der Algebra entwickelt, damit jeder fleißige Student, engagierte Wissenschaftler, neugierige Schüler und gelangweilte Streber, die an derselben Aufgabe arbeiten, alle dieselbe Lösung erhalten – egal, wo sie sich befinden oder wann sie die Aufgabe lösen. Natürlich wollen Sie nicht, dass sich die Regeln täglich ändern (und wir wollen auch nicht jedes Jahr ein neues Buch schreiben!). Sie brauchen Regelmäßigkeit und Sicherheit – und das gewährleisten die strengen Regeln und Eigenschaften der Algebra, die wir Ihnen in diesem Abschnitt vorstellen.

Bewahren Sie Ordnung – mit dem Kommutativgesetz

Das *Kommutativgesetz* gilt für die Operationen der Addition und Multiplikation. Es besagt, dass Sie die Reihenfolge der Terme in einer Operation ändern können, ohne dass sich das Endergebnis dadurch ändert:

- ✓ **Kommutativgesetz der Addition:** $a + b = b + a$
- ✓ **Kommutativgesetz der Multiplikation:** $a \cdot b = b \cdot a$

Wenn Sie 2 und 3 addieren, erhalten Sie 5. Wenn Sie 3 und 2 addieren, erhalten Sie ebenfalls 5. Wenn Sie 2 mit 3 multiplizieren, erhalten Sie 6. Wenn Sie 3 mit 2 multiplizieren, erhalten Sie ebenfalls 6.

Algebraische Ausdrücke treten normalerweise in einer bestimmten Reihenfolge auf, die praktisch ist, wenn Sie es mit Variablen und Koeffizienten (Multiplikatoren von Variablen) zu tun haben. Zuerst kommt der Ziffernanteil, gefolgt von den Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge. Aber die Eleganz des Kommutativgesetzes ist, dass $2xyz$ dasselbe ist wie $x2zy$. Es gibt keinen Grund, den Ausdruck in der zweiten, scheinbar durcheinandergeratenen Darstellung zu schreiben, aber es ist gut zu wissen, dass Sie die Reihenfolge bei Bedarf beliebig ändern können.

Harmonie in der Gruppe – mit dem Assoziativgesetz

Wie das Kommutativgesetz (voriger Abschnitt) gilt auch das Assoziativgesetz nur für die Operationen der Addition und Multiplikation. Das *Assoziativgesetz* besagt, dass Sie die Gruppierung von Operationen verändern können, ohne dass sich dadurch das Ergebnis ändert:

- ✓ **Assoziativgesetz der Addition:** $a + (b + c) = (a + b) + c$
- ✓ **Assoziativgesetz der Multiplikation:** $a(b \cdot c) = (a \cdot b)\, c$

Mithilfe des Assoziativgesetzes der Addition oder Multiplikation können Sie Ausdrücke vereinfachen. Wenn Sie dann bei Bedarf auch noch das Kommutativgesetz anwenden, haben Sie damit eine sehr mächtige Kombination an der Hand. Wenn Sie $(x + 14) + (3x + 6)$ vereinfachen wollen, lassen Sie zunächst die Klammern weg (dank des Assoziativgesetzes). Anschließend vertauschen Sie die beiden mittleren Terme unter Anwendung des Kommutativgesetzes der Addition. Schließlich ordnen Sie die Terme mithilfe von Klammern neu an und kombinieren die zusammengehörigen Terme:

$$
\begin{aligned}
&(x + 14) + (3x + 6)\\
&= x + 14 + 3x + 6\\
&= x + 3x + 14 + 6\\
&= (x + 3x) + (14 + 6)\\
&= 4x + 20
\end{aligned}
$$

Die Schritte sind hier äußerst detailliert beschrieben. Sie haben die Aufgabe wahrscheinlich sofort im Kopf gelöst. Wir haben die Schritte so gezeigt, um zu verdeutlichen, wie Kommutativgesetz und Assoziativgesetz kombiniert werden. Jetzt können Sie sie auf komplexere Aufgabenstellungen anwenden.

Das Distributivgesetz – Werte verteilen

Das *Distributivgesetz* besagt, dass Sie jeden Term in einem Ausdruck innerhalb einer Klammer mit dem Koeffizienten außerhalb der Klammer multiplizieren können, ohne den Wert des Ausdrucks zu verändern. Sie brauchen dazu eine einzige Operation, die Multiplikation, die sich über die Terme erstreckt, die Sie addieren und subtrahieren:

- **Distributive Multiplikation über die Addition:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- **Distributive Multiplikation über die Subtraktion:** $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Wenn Sie das Distributivgesetz auf die Aufgabenstellung $12 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)$ anwenden, machen Sie sich das Leben leichter: Sie verteilen die 12 über die Brüche, indem Sie jeden Bruch mit 12 multiplizieren, und fassen dann die Ergebnisse zusammen:

$$
\begin{aligned}
&12 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) \\
&= 12 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{2}{3} - 12 \cdot \frac{3}{4} \\
&= \cancel{12}^6 \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} + \cancel{12}^4 \cdot \frac{2}{\cancel{3}_1} - \cancel{12}^3 \cdot \frac{3}{\cancel{4}_1} \\
&= 6 + 8 - 9 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Es ist viel einfacher, die Lösung mithilfe des Distributivgesetzes zu finden, als alle Brüche auf denselben Nenner 12 zu bringen, sie zu kombinieren und dann mit 12 zu multiplizieren.

Das Distributivgesetz wird auch in umgekehrter Reihenfolge angewandt, wenn Sie eine Zahl ausklammern. Dabei ziehen Sie einen Faktor, der in einer Summe oder Differenz in jedem Term vorkommt, nach vorne und setzen die verbleibenden Teile in eine Klammer:

$$
\begin{aligned}
&6{,}5 \cdot 2{,}4 + 6{,}5 \cdot 4{,}3 + 6{,}5 \cdot 2{,}3 + 6{,}5 \\
&= 6{,}5 \cdot (2{,}4 + 4{,}3 + 2{,}3 + 1) \\
&= 6{,}5 \cdot 10 \\
&= 65
\end{aligned}
$$

Auch hier ist der Vorteil klar erkennbar: Statt vier Multiplikationen mit Dezimalzahlen durchzuführen, muss man dank des Ausklammerns nur eine einzige Multiplikation vornehmen. Diese Vorgehensweise ist die Umkehrung des Distributivgesetzes und heißt *faktorisieren*.

Mit dem Distributivgesetz beziehungsweise dem Faktorisieren werden Gleichungen vereinfacht – mit anderen Worten, Sie bereiten sie auf die Lösung vor.

Was Sie über Brüche wissen sollten

Wenn Sie ein Analysis-Buch auf einer beliebigen Seite aufschlagen, dann wird Ihnen mit ziemlicher Sicherheit ein Bruch begegnen. Sie können nicht flüchten. Für den Umgang mit Brüchen brauchen Sie ein paar Regeln.

Ein paar schnelle Regeln

Die erste Regel ist ganz einfach, aber sehr wichtig, weil sie in der Welt der Analysis immer wieder vorkommt:

Der Nenner eines Bruchs darf *nie* 0 sein. So hat $\frac{0}{5}$ den Wert 0, aber $\frac{5}{0}$ ist undefiniert.

Man erkennt ganz leicht, warum $\frac{5}{0}$ undefiniert ist, wenn man betrachtet, wie die Division funktioniert:

$$\frac{8}{2} = 4$$

Diese Berechnung besagt, dass 2 viermal in 8 passt; mit anderen Worten: $2 + 2 + 2 + 2 = 8$. Aber wie viele Nullen bräuchten Sie, um 5 zu erhalten? Dies funktioniert nicht, deshalb können Sie 5 (oder irgendeine andere Zahl) nicht durch 0 dividieren.

Und noch eine schnelle Regel:

Das *Reziprok* einer Zahl oder eines Ausdrucks ist ihr multiplikatives Inverses – eine verrückte Methode zu sagen, dass irgendetwas mit seinem Reziprok multipliziert gleich 1 ist. Um das Reziprok eines Bruchs zu erhalten, kehren Sie ihn um. Das Reziprok von $\frac{3}{4}$ ist also $\frac{4}{3}$, das Reziprok von 6 (was man auch als $\frac{6}{1}$ schreiben kann) ist $\frac{1}{6}$ und das Reziprok von $x - 2$ ist $\frac{1}{x-2}$.

Brüche multiplizieren

Das Addieren ist üblicherweise einfacher als das Multiplizieren, aber bei Brüchen gilt das Umgekehrte – los geht es also mit der Multiplikation.

Die Multiplikation von Brüchen ist ein Kinderspiel – Sie multiplizieren alles Obenstehende miteinander und dann alles Untenstehende miteinander:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Brüche dividieren

Die Division von Brüchen umfasst einen zusätzlichen Schritt: Sie kehren den zweiten Bruch um und multiplizieren dann – etwa so:

$$\begin{aligned} &\frac{3}{10} \div \frac{4}{5} \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{40} \end{aligned}$$

Jetzt kürzen Sie Zähler und Nenner mit 5 und erhalten:

$$=\frac{3}{8}$$

Beachten Sie, dass Sie auch vor der Multiplikation hätten kürzen können. Weil 5 einmal in 5 passt und in 10 zweimal, können Sie eine 5 kürzen:

$$\frac{3}{{}_{2}\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{5}^{\,1}}{4}=\frac{3}{8}$$

Beachten Sie außerdem, dass die ursprüngliche Aufgabenstellung auch als $\frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{5}}$ dargestellt werden könnte.

Brüche addieren

Sie wissen, dass Folgendes gilt:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$$

Diese Brüche können Sie addieren, weil sie einen gemeinsamen Nenner haben. Dasselbe funktioniert mit Variablen:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Beachten Sie, dass dort, wo in der obigen Gleichung eine 2 stand, in der unteren Gleichung ein a steht; wo in der obigen Gleichung eine 3 stand, steht in der unteren Gleichung ein b, und ebenso verhält es sich für 7 und c.

Variablen verhalten sich immer wie Zahlen.

Wenn Sie sich also fragen, was mit der oder den Variablen in einer Aufgabenstellung zu tun ist, dann fragen Sie sich, wie die Aufgabe aussähe, wenn anstelle der Variablen Zahlen stünden. Anschließend gehen Sie mit den Variablen in der Aufgabenstellung wie mit den Zahlen um. Schauen Sie sich dazu folgendes Beispiel an:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

Sie können diese Brüche nicht addieren, wie im obigen Beispiel gezeigt, weil es hier keinen gemeinsamen Nenner gibt. Angenommen, Sie versuchen, die Aufgabe mit Zahlen statt mit Variablen zu lösen. Wissen Sie noch, wie man $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$ addiert? Wir werden hier, auch wenn es möglich ist, nicht jede Zeile der Lösung kürzen. Sie werden gleich sehen, warum.

1. **Suchen Sie den *kleinsten gemeinsamen Nenner* (eigentlich funktioniert bei der Addition von Brüchen jeder gemeinsame Nenner) und wandeln Sie die Brüche entsprechend um.**

   Der kleinste gemeinsame Nenner ist 5 mal 8 oder 40. Wandeln Sie also die Brüche in 40stel um:

   $$\begin{aligned}\frac{2}{5}+\frac{3}{8}&=\frac{2}{5}\cdot\frac{8}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{5}\\&=\frac{2\cdot 8}{5\cdot 8}+\frac{3\cdot 5}{5\cdot 8}\end{aligned}$$

   $8 \cdot 5$ ist dasselbe wie $5 \cdot 8$, deshalb können Sie die Reihenfolge umkehren. Diese Brüche sind 40stel, wir möchten hier aber die $5 \cdot 8$ in den Nennern vorübergehend beibehalten.

2. **Addieren Sie die Zähler und behalten Sie den gemeinsamen Nenner unverändert bei:**

   $$=\frac{2\cdot 8+3\cdot 5}{5\cdot 8}\qquad\left(\text{Sie sehen, dass dies gleich } \frac{16+15}{40} \text{ oder } \frac{31}{40} \text{ ist.}\right)$$

Jetzt können Sie wieder die ursprüngliche Aufgabenstellung betrachten, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$. Hier steht statt der 2 ein a, statt der 5 ein b, statt der 3 ein c und statt der 8 ein d. Jetzt führen Sie genau dieselben Schritte aus wie bei der Addition von $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$. Sie können sich jede der Zahlen in der oben gezeigten Lösung als die Zahl auf einer Münze vorstellen und die Variable ist der Kopf auf der anderen Seite. Angenommen, Sie haben eine Münze mit einer 2 auf der einen Seite und einem a auf der anderen Seite; eine weitere Münze hat eine 8 auf der einen Seite und ein d auf der anderen Seite und so weiter. Jetzt gehen Sie nach den Schritten aus der vorigen Lösung vor, drehen die Münzen um, und schon haben Sie die Lösung für die ursprüngliche Aufgabenstellung. Und hier die Lösung:

$$\frac{ad+cb}{bd}$$

Brüche subtrahieren

Bei der Subtraktion von Brüchen gehen Sie genau wie bei der Addition vor, außer dass Sie hier subtrahieren statt addieren. Mit Einsichten wie diesen kann man wirklich gutes Geld verdienen.

Prozent berechnen

Das Wort *Prozent* hört man eigentlich jeden Tag, meist in einem der folgenden Zusammenhänge:

- ✓ Die Regenwahrscheinlichkeit beträgt 40 Prozent.
- ✓ Der DAX ist um zwei Prozent gestiegen.
- ✓ In Ihrem Test waren 99 Prozent der Antworten richtig.

Prozent kann man mit Brüchen, die einen Nenner von 100 haben, ausdrücken. Um wie viel Prozent es sich handelt, steht dann im Zähler: so viel von Hundert. Das Prozentzeichen ist %.

- ✓ $80\% = \frac{80}{100} = 0{,}80$
- ✓ $16\frac{1}{2}\% = \frac{16{,}5}{100} = 0{,}165$
- ✓ $2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02$

In den folgenden Formeln geht es um Prozent und Prozentsätze. Drücken Sie Prozent immer als Dezimalzahlen aus, damit sie leichter zu multiplizieren und zu dividieren sind. Dabei verschieben Sie das Dezimalkomma des Prozentsatzes zwei Stellen nach links. Wenn kein Dezimalkomma vorkommt, stellen Sie es sich ganz rechts vor.

Steuern und Rabatte beurteilen

Sie können sowohl die Steuern, die Sie zahlen, als auch den Rabatt, der auf eine Sache gewährt wird, mit Prozentrechnen ermitteln.

- ✓ Preis ohne Steuern = Kosten der Sache/(1 + Steuersatz als Dezimalzahl)
- ✓ Ermäßigter Preis = ursprünglicher Preis · (1 – Preisermäßigung in Prozent als Dezimalzahl)
- ✓ Ursprünglicher Preis = ermäßigter Preis/(1 – Preisermäßigung in Prozent als Dezimalzahl)

Jeder Kunde wird mit Ermäßigungen konfrontiert. Es lohnt sich aber, zuerst das Angebot zu überprüfen. Sehen Sie sich dazu folgende Beispiele an.

- ✓ Der Preis des 24.000-Euro-Autos, das Sie schon lange kaufen möchten, wurde um acht Prozent heruntergesetzt. Wie viel kostet es jetzt? Und wie viel würde es ohne die 19 Prozent Mehrwertsteuer kosten?

  Ermäßigter Preis = 24.000 · (1 – 0,08) = 24.000 · 0,92 = 22.080 Euro

  Preis ohne Steuern = 24.000/(1 + 0,19) ≈ 20.168,07 Euro

- ✓ Der Preis der Schuhe, für die Sie sich interessieren, ist zuerst um 40 Prozent und dann noch einmal um 15 Prozent herabgesetzt worden. Wie viel haben sie ursprünglich gekostet, wenn Sie sie jetzt für 68 Euro kaufen können?

  Berechnen Sie zuerst, wie viel die Schuhe vor der zweiten Herabsetzung und dann, von diesem Wert ausgehend, was sie vor der ersten Herabsetzung gekostet haben.

  - Preis nach der ersten beziehungsweise vor der zweiten Herabsetzung:

    68/(1 – 0,15) = 68/0,85 = 80 Euro

- Preis vor der ersten Herabsetzung beziehungsweise Originalpreis:

  80/(1 – 0,40) = 80/0,60 = 133,33 Euro

Die zweimalige Rabattierung von 40 Prozent und anschließend von 15 Prozent ist nicht das Gleiche wie ein Rabatt von 55 Prozent. Ein Rabatt von 55 Prozent auf 133,33 Euro hätte 60 Euro ergeben.

Potenzen machen stark

Sie sind in der Analysis völlig hilflos, wenn Sie die Potenzregeln nicht kennen:

✔ $x^0 = 1$

Diese Regel gilt immer, egal um welches x es sich handelt – einen Bruch, eine negative Zahl, irgendetwas –, außer für 0 (0 in die Potenz 0 erhoben ist nicht definiert). Also:

(Alles außer $0)^0 = 1$

✔ $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ und $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

Beispielsweise ist $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$. Klasse! Vergessen Sie das nicht! Beachten Sie, dass die Lösung $\frac{1}{16}$ *nicht* negativ ist.

✔ $x^{2/3} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$ und $x^{a/b} = \left(\sqrt[b]{x}\right)^a = \sqrt[b]{x^a}$

Diese praktische Regel können Sie rückwärts anwenden, um eine Aufgabenstellung mit Wurzel in eine einfachere Form mit Potenz umzuwandeln.

✔ $x^2 \cdot x^3 = x^5$ und $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

Hier *addieren* Sie die Potenzen. (Bei x^2 *plus* x^3 dagegen können Sie gar nichts machen, weil es keine *ähnlichen Terme* sind. Sie können nur Terme addieren oder subtrahieren, wenn der variable Teil jedes Terms gleich ist, zum Beispiel $3xy^2z + 4xy^2z = 7xy^2z$. Das funktioniert aus genau demselben Grund, warum drei Stühle plus vier Stühle gleich sieben Stühle sind; *unähnliche* Terme können nicht addiert werden – oder würden Sie versuchen, fünf Stühle und zwei Autos zu addieren?)

✔ $\frac{x^5}{x^3} = x^2$ und $\frac{x^2}{x^6} = x^{-4}$ und $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

Hier *subtrahieren* Sie die Potenzen.

✔ $\left(x^2\right)^3 = x^6$ und $(x^a)^b = x^{ab}$

Hier *multiplizieren* Sie die Potenzen.

✔ $(xyz)^3 = x^3y^3z^3$ und $(xyz)^a = x^ay^az^a$

Hier *multiplizieren* Sie die Potenz in jede Variable *ein*.

✔ $\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x^4}{y^4}$ und $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$

Und hier dasselbe.

Es gilt NICHT $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

In diesem Fall dürfen Sie die Potenz nicht einmultiplizieren. Stattdessen multiplizieren Sie auf die übliche Weise aus:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Was passiert, wenn Sie das Gesetz fälschlicherweise auf Zahlen anwenden: $(3 + 5)^2$ ist gleich 8^2 oder 64, und *nicht* $3^2 + 5^2$, was gleich 9 + 25, also 34 ist?

Zu den Wurzeln der Wurzeln

Wurzeln, insbesondere Quadratwurzeln, begegnen uns überall in der Analysis. Es ist also unabdingbar, dass Sie wissen, wie sie funktionieren, und dass Sie die grundlegende Beziehung zwischen Wurzeln und Potenzen verstehen. Und genau das werden wir Ihnen jetzt zeigen.

Jede Wurzel kann in eine Potenz umgewandelt werden, zum Beispiel $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$ oder $\sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$. Sie brauchen die folgenden Wurzelregeln eigentlich gar nicht – Sie wandeln jede Wurzel in eine Potenz um und wenden die Potenzregeln an, um die Aufgabe zu lösen (das ist im Übrigen eine sehr sinnvolle Vorgehensweise). Aber wenn Sie ein Arbeitstier sind, dann sehen Sie sich die folgenden Regeln an. (Sehen Sie sie womöglich zum ersten Mal?) Wenn Sie nämlich diesen Ungetümen irgendwann begegnen, dann ist es hilfreich, ihre Regeln zu kennen:

- $\sqrt{0} = 0$ und $\sqrt{1} = 1$

Negative Zahlen können Sie nicht unter einer Quadratwurzel oder einer anderen geradzahligen Wurzel berechnen – zumindest nicht in der grundlegenden Analysis.

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}, \quad \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ und $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}, \quad \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ und $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$ und $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

  Sie *multiplizieren* hier die Wurzelindizes.
- $\sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt[4]{a^4} = |a|, \quad \sqrt[6]{a^6} = |a|$ und so weiter.

Wenn Sie eine *geradzahlige* Wurzel haben, brauchen Sie die Absolutwertstriche für die Lösung, denn die Antwort ist immer positiv, egal ob a positiv oder negativ ist. Handelt es sich um eine ungeradzahlige Wurzel, brauchen Sie die Absolutwertstriche nicht. Somit gilt:

$\sqrt[3]{a^3} = a, \quad \sqrt[5]{a^5} = a$ und so weiter.

Es gilt NICHT $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

Wenn Sie diesen Fehler machen, werden Sie sofort in den Kerker geworfen.

Versuchen Sie es einmal mit Zahlen: $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, was *nicht* gleich 2 + 3 ist.

Logarithmen … wirklich keine Hexerei

Ein *Logarithmus* ist eine andere Möglichkeit, eine exponentielle Beziehung zwischen Zahlen auszudrücken. Zum Beispiel:

$2^3 = 8$, dann gilt

$\log_2 8 = 3$ (sprich »Der Logarithmus mit der Basis 2 von 8 ist 3«)

Diese beiden Gleichungen drücken genau dasselbe aus. Sie können sich die eine davon als die griechische Methode vorstellen, diese mathematische Beziehung zu beschreiben, und die andere als die lateinische Methode, dasselbe zu sagen. Die Basis eines Logarithmus kann eine beliebige Zahl größer 0 sein. Wenn die Basis gleich 10 ist, geben Sie sie konventionsgemäß *nicht* an. $\log 1000 = 3$ beispielsweise bedeutet, $\log_{10} 1000 = 3$. Die logarithmische Basis e ($e \approx 2{,}72$) wird als *ln* statt als $\log_e$ dargestellt – Mathematiker verwenden diesen Logarithmus so oft, dass sie eine handliche Abkürzung dafür eingeführt haben.

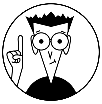
Die folgenden Eigenschaften von Logarithmen sollten Ihnen geläufig sein:

- ✓ $\log 1 = 0$
- ✓ $\log_c c = 1$
- ✓ $\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$
- ✓ $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$
- ✓ $\log_c a^b = b \log_c a$
- ✓ $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

  Mit dieser Eigenschaft können Sie Dinge wie $\log_3 20$ auf Ihrem Taschenrechner berechnen, indem Sie $\dfrac{\log\ 20}{\log\ 3}$ unter Verwendung der Basis 10 für c eingeben.
- ✓ $\log_a a^b = b$
- ✓ $a^{\log_a b} = b$

Mehr als einen Term ausmultiplizieren

Im Abschnitt über das Distributivgesetz haben wir Ihnen gezeigt, wie man einen Term mit einer Reihe weiterer Terme ausmultipliziert. Jetzt erfahren Sie, wie man ein *Binom* mit zwei Termen und ein *Polynom* mit drei oder mehr Termen ausmultipliziert.



Das Wort *Polynom* besteht aus zwei Teilen: *poly* heißt *viele*, *nomen* heißt *Name* oder *Bezeichnung*. Ein Polynom ist ein algebraischer Ausdruck mit zwei oder mehr Termen. Ein Polynom mit einem Term ist ein Monom, ein Polynom mit zwei Termen ist ein Binom, ein Polynom mit drei Termen ist ein Trinom.

Binome ausmultiplizieren

Beim Ausmultiplizieren eines Binoms mit einer Anzahl von Termen muss man beide Terme des Binoms auf jeden der weiteren Terme verteilen, also mit ihnen multiplizieren. Anhand folgender Schritte sehen Sie, wie das funktioniert:

1. **Teilen Sie das erste Binom in seine zwei Terme x^2 und $-y^2$ auf.**

   $(x^2 - y^2)\ (x^2 + 2xy + y^2)$

2. **Multiplizieren Sie jeden dieser Terme mit den anderen Termen.**

   $x^2(x^2 + 2xy + y^2) - y^2(x^2 + 2xy + y^2)$

3. **Führen Sie die Multiplikationen durch.**

   $x^2(x^2) + x^2(2xy) + x^2(y^2) - y^2(x^2) - y^2(2xy) - y^2(y^2)$

4. **Vereinfachen und kombinieren Sie.**

   - Multiplizieren Sie und addieren Sie die Exponenten.

     $x^4 + 2x^3y + x^2y^2 - x^2y^2 - 2xy^3 - y^4$

   - Kombinieren Sie die Terme.

     $x^4 + 2x^3y - 2xy^3 - y^4$

Polynome unter der Lupe

Wie lautet die höchste Potenz in einem Polynom? Die höchste Potenz von $x^3 + 1$ ist beispielsweise 3, also handelt es sich dabei um ein *Binom* dritten *Grades*. Es handelt sich dabei um ein *Binom*, weil das Polynom zwei Terme hat, und um den dritten *Grad*, weil die höchste vorkommende Potenz 3 ist. Ein Polynom fünften Grades hat die höchste Potenz 5.

Der Koeffizient vor dieser höchsten Potenz heißt *Leitkoeffizient*. Ist der Leitkoeffizient 1, heißt das Polynom *normiert*. Eine Zahl ohne Variable heißt *Absolutglied*. Beispielsweise ist $2x^3 - 7x^2 + x + 3$ ein Polynom dritten Grades mit Leitkoeffizient 2 und Absolutglied 3.

Die Polynome der ersten Grade haben besondere Namen:

✓ **Grad 0:** konstant

✓ **Grad 1:** linear

✓ **Grad 2:** quadratisch

✓ **Grad 3:** kubisch

Polynom mal Polynom

Die Regel, die Sie gleich kennenlernen, trifft auf jedes Produkt mit einer beliebigen Anzahl von Termen zu. Man kann diese Methode auf vier, fünf und mehr Terme anwenden.

Wenn man ein Polynom (viele Terme) auf eine beliebige Anzahl von weiteren Termen verteilt (sie ausmultipliziert), muss jeder Term des ersten Faktors mit jedem Term des zweiten Faktors multipliziert werden. Nach der Multiplikation wird vereinfacht und kombiniert.

Das folgende Beispiel besteht ausschließlich aus Variablen, die alle unterschiedlich sind.

1. **Teilen Sie die Terme des ersten Faktors auf und multiplizieren Sie jeden dieser Terme mit dem zweiten Faktor.**

   $(a + b + c + d + \ldots)\ (z + y + w + x + \ldots) =$

   $a(z + y + w + x + \ldots) + b(z + y + w + x + \ldots) + c(z + y + w + x + \ldots) + \ldots$

2. **Führen Sie die Multiplikationen durch.**

   $az + ay + aw + ax + \ldots + bz + by + bw + bx + \ldots + cz + cy + cw + cx + \ldots$

3. **Kombinieren Sie die Terme.**

Zum Beispiel wäre $az + az = 2az$. Im vorangegangenen Beispiel gibt es jedoch keine ähnlichen Terme – prüfen Sie das aber immer nach!

Besonders verteilt: Manchmal geht es schneller

Das Ausmultiplizieren von Polynomen ist nicht schwierig, aber man kann Zeit sparen, wenn man ein paar Besonderheiten des Ausmultiplizierens kennt. Dann muss man nicht alles mühsam multiplizieren, sondern kann anhand von festen Regeln eine Abkürzung beim Rechnen nehmen. Erkennt man eine dieser möglichen Abkürzungen nicht, ist es auch kein Weltuntergang – man ärgert sich höchstens über sich selbst. Hier ein paar hilfreiche Formeln:

✓ Die drei binomischen Formeln:

   $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

   $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$

✓ Die Differenz zwischen zwei Kubikzahlen:

   $(a - b)\ (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

✓ Die Summe von zwei Kubikzahlen:

   $(a + b)\ (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Rechnen mit der dritten binomischen Formel

Wie würden Sie $16 \cdot 14$ rechnen? Nun, die einfachste Möglichkeit ist, Sie tippen es in Ihren Taschenrechner ein. Eine andere Möglichkeit ist, Sie rechnen erst 10 mal 14 und addieren dann noch 6 mal 14. Eine dritte Möglichkeit ist die dritte binomische Formel. Schauen Sie sich folgendes Beispiel an:

$$16 \cdot 14 = (15 + 1) \cdot (15 - 1) = 15^2 - 1^2 = 225 - 1 = 224$$

Und das soll Sie weiterbringen? Nun ja, diese Rechnung klappt eben nur in bestimmten Fällen und dann sollten Sie auch noch wissen, was jeweils die Quadratzahlen ergeben. Treffen beide Voraussetzungen zu, ist dies auf jeden Fall eine Möglichkeit, schwierigere Aufgaben schnell im Kopf zu rechnen. Was halten Sie zum Beispiel von der Aufgabe $53 \cdot 47$?