

## Inhaltsverzeichnis

### Teil III

#### Kapitel 1: Vektorraumtheorie

§1 Hinweise und Bezeichnungen	1
§2 Allgemeine Vektorräume über einem Körper	2
§3 Vektorräume endlicher Dimension	20
§4 Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen	34

#### Kapitel 2: Matrizen. Lineare Gleichungssysteme. Determinanten

§5 Matrizen	54
§6 Lineare Gleichungssysteme	75
§7 Determinanten	82
§8 Eigenwerttheorie	92

#### Kapitel 3: Affine Geometrie

§9 Der n-dimensionale affine Raum	102
§10 Affine Räume mit Anordnung	113
§11 Affine Abbildungen	121
§12 Affine Quadrikentheorie	136

#### Kapitel 4: Euklidische und unitäre Vektorräume

§13 Vektorräume mit Skalarprodukt	157
§14 Normale Endomorphismen	165
§15 Normalformen der normalen Endomorphismen	171

#### Kapitel 5: Euklidische und unitäre Geometrie

§16 Der n-dimensionale unitäre und euklidische Punktraum	182
§17 Ähnliche und kongruente Selbstabbildungen	192
§18 Euklidische Quadrikentheorie	218

#### Kapitel 6: Projektive Geometrie

§19 Der n-dimensionale projektive Raum	250
§20 Projektive Abbildungen	254
§21 Das Dualitätsprinzip	271
§22 Kollineationen und Korrelationen	277
§23 Standardsätze der projektiven Ebene $P^2$	285
§24 Projektive Quadrikentheorie	289
§25 Projektives Modell des euklidischen Raumes	299

H. Schaal

## Lineare Algebra und Analytische Geometrie

### Teil I

#### Einleitung

#### Kapitel 1: Vektorraumtheorie

##### § 1 Grundbegriffe über Gruppen und Körper

- 1.1 Gruppen
- 1.2 Körper

##### § 2 Allgemeine Vektorräume über einem Körper

- 2.1 Einführung
- 2.2 Untervektorräume
- 2.3 Durchschnitt und Summe (Verbindungsraum).  
Lineare Hülle
- 2.4 Lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit,  
Basis

##### § 3 Vektorräume endlicher Dimension

- 3.1 Basissätze
- 3.2 Koordinaten
- 3.3 Basis- und Koordinatentransformation
- 3.4 Dimensionssätze

##### § 4 Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen

- 4.1 Grundbegriffe über Abbildungen
- 4.2 Grundeigenschaften linearer Abbildungen
- 4.3 Spezielle lineare Abbildungen
- 4.4 Produkte linearer Abbildungen.  
Automorphismengruppe  $GL(n, K)$
- 4.5 Summen linearer Abbildungen. Endomorphismenring

#### Kapitel 2: Matrizen. Lineare Gleichungssysteme. Determinanten.

##### § 5 Matrizen

- 5.1 Motivation
- 5.2 Grundregeln der Matrizenrechnung
- 5.3 Koordinatendarstellung linearer Abbildungen
- 5.4 Rang und Normalform einer Matrix
- 5.5 Bestimmung einer Zeilenbasis einer Matrix  
mit Folgerungen

##### § 6 Lineare Gleichungssysteme

- 6.1 Problemstellung
- 6.2 Homogene lineare Gleichungssysteme
- 6.3 Inhomogene lineare Gleichungssysteme
- 6.4 Die Struktur der Lösung inhom. lin. Gleichungen
- 6.5 Prakt. Bestimmung der Lösungen lin. Gleichungen
- 6.6 Praktische Bestimmung inverser Matrizen

## § 7 Determinanten

- 7.1 Multilinearform. Determinantenform
- 7.2 Permutationen
- 7.3 Determinanten
- 7.4 Berechnung von Determinanten und Anwendungen

## § 8 Eigenwerttheorie

- 8.1 Eigenwerte u. Eigenvektoren eines Endomorphismus
- 8.2 Charakteristisches Polynom
- 8.3 Ähnliche Matrizen und Normalformen von Endomorphismen

## Kapitel 3: Affine Geometrie

### § 9 Der n-dimensionale affine Raum

- 9.1 Grundbegriffe
- 9.2 Affine Unterräume
- 9.3 Parallele affine Unterräume
- 9.4 Dimensionssatz für affine Unterräume
- 9.5 Affine Koordinatensysteme
- 9.6 Gleichungen affiner Unterräume
- 9.7 Beziehungen zw. Gleichungen und Parameterdarst. von affinen Unterräumen und Untervektorräumen
- 9.8 Affine Koordinatentransformation

### § 10 Affine Räume mit Anordnung

- 10.1 Problemstellung
- 10.2 Halbräume
- 10.3 Affine Simplexe und Späte
- 10.4 Konvexe Mengen
- 10.5 Homogene Darstellung affiner Unterräume
- 10.6 Volumen und Teilverhältnis

### § 11 Affine Abbildungen

- 11.1 Problemstellung
- 11.2 Eigenschaften affiner Abbildungen
- 11.3 Koordinatendarstellung affiner Abbildungen
- 11.4 Affine Selbstabbildungen
- 11.5 Affinitäten

### § 12 Affine Quadrikentheorie

- 12.1 Bilinearformen, quadratische Formen, Polarform
- 12.2 Begriff der Quadrik im  $A^n$
- 12.3 Affine Klassifikation und Normalformen der Quadriken
- 12.4 Quadrikentheorie im Reellen und Komplexen
- 12.5 Affine Quadrikengeometrie
- 12.6 Figuren der einteiligen Quadriken für n=2, 3

Formelverzeichnis

Liste der Bezeichnungen

Das deutsche und griechische Alphabet

Literatur

Stichwortverzeichnis

**Einleitung**

**Kapitel 4: Euklidische und unitäre Vektorräume**

**§13 Vektorräume mit Skalarprodukt**

- 13.1 Einführung des euklidischen Vektorraumes
- 13.2 Komplexe Fortsetzung des Skalarprodukts
- 13.3 Längenmessung
- 13.4 Orthogonalität
- 13.5 Koordinatendarstellung der Sesquilinearformen und der Skalarprodukte
- 13.6 Basis- und Koordinatentransformationen
- 13.7 Unitäre und orthogonale Matrizen
- 13.8 Winkelmessung
- 13.9 Komplexe euklidische Vektorräume

**§14 Normale Endomorphismen**

- 14.1 Motivation
- 14.2 Adjungierte Endomorphismen im unitären Vektorraum
- 14.3 Normale Endomorphismen
- 14.4 Isometrien
- 14.5 Gruppeneigenschaft der Isometrien

**§15 Normalformen der normalen Endomorphismen**

- 15.1 Der allgemeine, komplexe Fall
- 15.2 Der euklidische Sonderfall
- 15.3 Normalform selbstadjungierter Endomorphismen
- 15.4 Normalform antiselbstadjungierter Endomorphismen
- 15.5 Normalformen der Isometrien im  $V^n(\mathbb{C})$  und  $V^n(\mathbb{R})$
- 15.6 Klassifikation der Isometrien für  $V^2(\mathbb{R})$  und  $V^3(\mathbb{R})$
- 15.7 Reelle Hauptachsentransformation

**Kapitel 5: Euklidische und unitäre Geometrie**

**§16 Der n-dimensionale unitäre und euklidische (Punkt-)Raum**

- 16.1 Grundbegriffe
- 16.2 Abstandsmessung
- 16.3 Winkelmessung
- 16.4 Volumenmessung
- 16.5 Orthogonalität und Lote
- 16.6 Das vektorielle Produkt im  $E^3$

**§17 Ähnliche und kongruente Selbstabbildungen**

- 17.1 Grundbegriffe
- 17.2 Die Ähnlichkeits- und Bewegungsgruppe
- 17.3 Koordinatendarstellung der Ähnlichkeiten und Bewegungen
- 17.4 Normalform der Ähnlichkeiten und Bewegungen
- 17.5 Klassifikation der eukl. Bewegungen im  $E^2$  und  $E^3$

## §18 Euklidische Quadrikentheorie

- 18.1 Problemstellung
- 18.2 Die euklidische Normalform einer Quadrik
- 18.3 Euklidische Quadrikengeometrie
- 18.4 Metrische Klassifikation der Quadriken im  $E^2$  und  $E^3$

## Kapitel 6: Projektive Geometrie

## §19 Der n-dimensionale projektive Raum

- 19.1 Motivation
- 19.2 Das Leitbild der projektiven Ebene  $P^2$
- 19.3 Der n-dimensionale projektive Raum  $P^n$
- 19.4 Projektive Unterräume
- 19.5 Dimensionssatz für projektive Unterräume
- 19.6 Projektive Koordinaten
- 19.7 Gleichungen und Parameterdarstellungen projektiver Unterräume
- 19.8 Projektive Koordinatentransformationen

## §20 Projektive Abbildungen

- 20.1 Problemstellung
- 20.2 Eigenschaften projektiver Abbildungen
- 20.3 Koordinatendarstellung projektiver Abbildungen
- 20.4 Projektive Selbstabbildungen
- 20.5 Projektivitäten und Perspektivitäten
- 20.6 Projektionen
- 20.7 Das Doppelverhältnis
- 20.8 Beziehungen zwischen projektiven und affinen Räumen

## §21 Das Dualitätsprinzip

- 21.1 Grundbegriffe der dualen Vektorräume
- 21.2 Das Dualitätsprinzip der linearen Algebra
- 21.3 Das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie
- 21.4 Hyperebenenkoordinaten
- 21.5 Das Doppelverhältnis von Hyperebenen
- 21.6 Dualität bei projektiven Abbildungen

## §22 Kollineationen und Korrelationen

- 22.1 Kollineationen
- 22.2 Der v. STAUDTsche Satz
- 22.3 Korrelationen
- 22.4 Polarsysteme und Nullsysteme

## §23 Standardsätze der projektiven Ebene $P^2$

- 23.1 Satz von PAPPUS. Vollständiges Vierseit, vollständiges Viereck
- 23.2 Der Satz von DESARGUES
- 23.3 Der Satz von PAPPUS-PASCAL

## §24 Projektive Quadrikentheorie

- 24.1 Begriff der Quadrik im  $P^n$
- 24.2 Projektive Klassifikation und Normalformen der Quadriken
- 24.3 Quadrikentheorie im Reellen und im Komplexen
- 24.4 Projektive Quadrikengeometrie
- 24.5 Duale Quadriken
- 24.6 Projektive Erzeugung der Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse

## §25 Projektives Modell des euklidischen Raumes

- 25.1 Grundgedanken
- 25.2 Das absolute Gebilde der euklidischen Geometrie
- 25.3 Projektive Deutung der euklidischen Winkelmessung
- 25.4 Ausblicke

## Anhang I

- I 1) Quadratische Körpererweiterungen
- I 2) Automorphismen eines Körpers  $K$
- I 3) Automorphismen des Erweiterungskörpers  $K(\sqrt{c})$
- I 4) Das Rechnen mit komplexen Zahlen

## Anhang II

- II 1) Komplexe Erweiterung eines Vektorraumes
- II 2) Basis und Dimension der komplexen Vektorraumerweiterung. Reelle Ausschnitte
- II 3) Reelle und komplexe Untervektorräume
- II 4) Reelle und komplexe affine Räume und Unterräume
- II 5) Komplexe Erweiterung linearer und affiner Selbstabbildungen
- II 6) Komplexe Erweiterung und reelle Ausschnitte einer Quadrik
- II 7) Reelle und komplexe projektive Räume; v. STAUDTsche Ketten

## Anhang III

Die Automorphismen des reellen Zahlkörpers

Formelverzeichnis

Stichwortverzeichnis