

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Prolog: 3000 Jahre Analysis</b>	<b>1</b>
1.1	Was ist Analysis?	3
1.2	Vorläufer von $\pi$	4
1.3	Das $\pi$ der Bibel	7
1.4	Volumen eines Pyramidenstumpfes	8
1.5	Babylonische Näherung an $\sqrt{2}$	13
<b>2</b>	<b>Das Kontinuum in der griechisch-hellenistischen Antike</b>	<b>15</b>
2.1	Die Griechen formen die Mathematik	18
2.1.1	Der Beginn: Thales von Milet und seine Schüler	19
2.1.2	Die Pythagoreer	21
2.1.3	Die Proportionenlehre des Eudoxos in Euklids Elementen	27
2.1.4	Die Methode der Exhaustion - Integration auf griechisch	33
2.1.5	Das Problem der Kontingenzwinkel	37
2.1.6	Die drei großen klassischen Probleme	38
2.2	Kontinuum versus Atome - Infinitesimale versus Indivisible	47
2.2.1	Die Eleaten	48
2.2.2	Atomismus und Kontinuum	49
2.2.3	Indivisible und Infinitesimale	51
2.2.4	Die Zenonschen Paradoxien	54
2.3	Archimedes	59
2.3.1	Leben, Tod und Anekdoten	59
2.3.2	Das Schicksal der archimedischen Schriften	67
2.3.3	Die Methodenschrift: Zugang hinsichtlich der mechanischen Sätze	71
2.3.4	Die Quadratur der Parabel durch Exhaustion	76
2.3.5	Über Spiralen	80
2.3.6	Archimedes fängt $\pi$	84
2.4	Die Beiträge der Römer zur Analysis	86
2.5	Aufgaben zu Kapitel 2	89

<b>3</b>	<b>Wie Wissen wanderte – Vom Orient zum Okzident</b>	<b>91</b>
3.1	Der Niedergang der Mathematik und die Rettung durch die Araber	93
3.2	Die Beiträge der Araber zur Analysis	98
3.2.1	Avicenna (Ibn Sīnā): Universalgelehrter im Orient	98
3.2.2	Alhazen (Al-Haitam): Physiker und Mathematiker	99
3.2.3	Averroës (Ibn Rušd): Aristoteliker im Islam	106
3.3	Aufgaben zu Kapitel 3	108
<b>4</b>	<b>Kontinuum und Atomistik in der Scholastik</b>	<b>109</b>
4.1	Der Wiederbeginn in Europa	111
4.2	Die große Zeit der Übersetzer	120
4.3	Das Kontinuum in der Scholastik	127
4.3.1	Robert Grosseteste	130
4.3.2	Roger Bacon	131
4.3.3	Albertus Magnus	133
4.3.4	Thomas Bradwardine	136
4.3.5	Nicole Oresme	142
4.4	Scholastische „Abweichler“	148
4.5	Nicolaus von Kues	150
4.5.1	Die mathematischen Werke	152
4.6	Aufgaben zu Kapitel 4	156
<b>5</b>	<b>Indivisible und Infinitesimale in der Renaissance</b>	<b>157</b>
5.1	Renaissance: Die Wiedergeburt der Antike	159
5.2	Die Schwerpunktrechner	162
5.3	Johannes Kepler	170
5.3.1	Neue Stereometrie der Fässer	190
5.4	Galileo Galilei	195
5.4.1	Der Umgang Galileis mit dem Unendlichen	203
5.5	Cavalieri, Guldin, Torricelli und die hohe Kunst der Indivisiblen	208
5.5.1	Die Indivisiblenrechnung nach Cavalieri	212
5.5.2	Die Kritik durch Guldin	220
5.5.3	Die Kritik durch Galilei	221
5.5.4	Torricellis scheinbares Paradoxon	222
5.5.5	De Saint-Vincent und die Fläche unter der Hyperbel	224
5.6	Aufgaben zu Kapitel 5	233

<b>6</b>	<b>An der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert</b>	<b>235</b>
6.1	Analysis vor Leibniz in Frankreich	237
6.1.1	Frankreich an der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert	237
6.1.2	René Descartes	240
6.1.3	Pierre de Fermat	250
6.1.4	Blaise Pascal	260
6.1.5	Gilles Personne de Roberval	273
6.2	Analysis vor Leibniz in den Niederlanden	279
6.2.1	Frans van Schooten jr.	281
6.2.2	René François Walther de Sluse	281
6.2.3	Johann van Waveren Hudde	283
6.2.4	Christiaan Huygens	286
6.3	Analysis vor Newton in England	289
6.3.1	Die Entdeckung der Logarithmen	289
6.3.2	England an der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert	290
6.3.3	John Napier und die Napierschen Logarithmen	294
6.3.4	Henry Briggs und seine Logarithmen	301
6.3.5	England im 17. Jahrhundert	312
6.3.6	John Wallis und die Arithmetik des Unendlichen	315
6.3.7	Isaac Barrow und die Liebe zur Geometrie	325
6.3.8	Die Entdeckung der Reihendarstellung des Logarithmus durch Nicolaus Mercator	332
6.3.9	Die ersten Rektifizierungen: Harriot und Neile	337
6.3.10	James Gregory	346
6.4	Analysis in Indien	347
6.5	Aufgaben zu Kapitel 6	351
<b>7</b>	<b>Newton und Leibniz – Giganten und Widersacher</b>	<b>353</b>
7.1	Isaac Newton	355
7.1.1	Kindheit und Jugend	355
7.1.2	Der Student in Cambridge	358
7.1.3	Der Lucasische Professor	366
7.1.4	Alchemie, Religion und die große Krise	370
7.1.5	Newton als Präsident der Royal Society	375
7.1.6	Das Binomialtheorem	377

7.1.7	Die Fluxionsrechnung .....	378
7.1.8	Der Hauptsatz .....	381
7.1.9	Kettenregel und Substitutionen .....	383
7.1.10	Das Rechnen mit Reihen .....	383
7.1.11	Integration durch Substitution .....	385
7.1.12	Newtons letzte Arbeiten zur Analysis .....	387
7.1.13	Differentialgleichungen bei Newton .....	387
7.2	Gottfried Wilhelm Leibniz .....	389
7.2.1	Kindheit, Jugend und Studium .....	389
7.2.2	Leibniz in Mainzer Diensten .....	392
7.2.3	Leibniz in Hannover .....	395
7.2.4	Der Prioritätsstreit .....	401
7.2.5	Erste Erfolge mit Differenzenfolgen .....	405
7.2.6	Die Leibnizsche Notation .....	407
7.2.7	Das charakteristische Dreieck .....	411
7.2.8	Die unendlich kleinen Größen .....	414
7.2.9	Das Transmutationstheorem .....	418
7.2.10	Das Kontinuitätsprinzip .....	421
7.2.11	Differentialgleichungen bei Leibniz .....	423
7.3	Erste Kritik: George Berkeley .....	424
7.4	Aufgaben zu Kapitel 7 .....	427
8	<b>Absolutismus, Aufklärung, Aufbruch zu neuen Ufern</b> .....	429
8.1	Historische Einführung .....	431
8.2	Jakob und Johann Bernoulli .....	439
8.2.1	Die Variationsrechnung .....	444
8.3	Leonhard Euler .....	448
8.3.1	Der Funktionsbegriff bei Euler .....	460
8.3.2	Das unendlich Kleine bei Euler .....	462
8.3.3	Die trigonometrischen Funktionen .....	465
8.4	Brook Taylor .....	467
8.4.1	Die Taylor-Reihe .....	469
8.4.2	Bemerkungen zur Differenzenrechnung .....	470
8.5	Colin Maclaurin .....	471
8.6	Die Algebraisierung beginnt: Joseph-Louis Lagrange .....	471

8.6.1	Lagranges algebraische Analysis .....	472
8.7	Fourier Reihen und mehrdimensionale Analysis .....	475
8.7.1	Joseph Fourier .....	475
8.7.2	Frühe Diskussionen um die Schwingungsgleichung ....	477
8.7.3	Partielle Differentialgleichungen und mehrdimensionale Analysis .....	478
8.7.4	Eine Vorausschau: Die Bedeutung der Fourier-Reihen für die Analysis .....	479
8.8	Aufgaben zu Kapitel 8 .....	484
<b>9</b>	<b>Auf dem Weg zu begrifflicher Strenge im 19. Jahrhundert</b>	<b>485</b>
9.1	Vom Wiener Kongress zum Deutschen Kaiserreich .....	489
9.2	Die Entwicklungslinien der Analysis im 19. Jahrhundert ....	497
9.3	Bernhard Bolzano und die Paradoxien des Unendlichen .....	497
9.3.1	Bolzos Beiträge zur Analysis .....	500
9.4	Die Arithmetisierung der Analysis: Cauchy .....	503
9.4.1	Grenzwert und Stetigkeit .....	508
9.4.2	Die Konvergenz von Folgen und Reihen .....	509
9.4.3	Ableitung und Integral .....	512
9.5	Die Entwicklung des Integralbegriffs .....	514
9.6	Die finale Arithmetisierung der Analysis: Weierstraß .....	521
9.6.1	Die reellen Zahlen .....	524
9.6.2	Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Konvergenz .....	525
9.6.3	Gleichmäßigkeit .....	527
9.7	Richard Dedekind und seine Wegbegleiter .....	529
9.7.1	Die Dedekindschen Schnitte .....	536
9.8	Aufgaben zu Kapitel 9 .....	542
<b>10</b>	<b>An der Wende zum 20. Jahrhundert: Mengenlehre und die Suche nach dem wahren Kontinuum</b> .....	<b>543</b>
10.1	Von der Gründung des Deutschen Kaiserreiches zu den Weltkatastrophen .....	546
10.2	Der heilige Georg erlegt den Drachen: Cantor und die Mengenlehre .....	551
10.2.1	Cantors Konstruktion der reellen Zahlen .....	561
10.2.2	Cantor und Dedekind .....	562
10.2.3	Die transfiniten Zahlen .....	570

10.2.4 Die Rezeption der Mengenlehre .....	573
10.2.5 Cantor und das unendlich Kleine .....	574
10.3 Auf der Suche nach dem wahren Kontinuum: Paul Du Bois-Reymond .....	575
10.4 Auf der Suche nach dem wahren Kontinuum: Die Intuitionisten	577
10.5 Vektoranalysis .....	582
10.6 Differentialgeometrie .....	585
10.7 Gewöhnliche Differentialgleichungen .....	587
10.8 Partielle Differentialgleichungen .....	590
10.9 Die Analysis wird noch mächtiger: Funktionalanalysis .....	592
10.9.1 Grundbegriffe der Funktionalanalysis .....	592
10.9.2 Ein geschichtlicher Abriss der Funktionalanalysis ....	596
10.10 Aufgaben zu Kapitel 10 .....	605
<b>11 Ein Kreis schließt sich: Infinitesimale in der Nichtstandardanalysis .....</b>	<b>607</b>
11.1 Vom Kalten Krieg bis heute .....	611
11.1.1 Computer und Sputnikschock .....	613
11.1.2 Der „Kalte Krieg“ und sein Ende .....	615
11.1.3 Bologna-Reform, Krisen, Terrorismus .....	616
11.2 Die Wiedergeburt der unendlich kleinen Zahlen .....	618
11.2.1 Die Infinitesimalmathematik im „schwarzen Buch“ ....	620
11.2.2 Die Nichtstandardanalysis von Laugwitz und Schmieden	623
11.3 Robinson und die Nichtstandardanalysis .....	625
11.4 Nichtstandardanalysis durch Axiomatisierung: Der Ansatz von Nelson .....	627
11.5 Nichtstandardanalysis und glatte Welten .....	628
11.6 Aufgaben zu Kapitel 11 .....	634
<b>12 Analysis auf Schritt und Tritt .....</b>	<b>635</b>
<b>Literatur .....</b>	<b>647</b>
<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>663</b>
<b>Personenverzeichnis mit Lebensdaten .....</b>	<b>683</b>
<b>Sachverzeichnis .....</b>	<b>693</b>