

Inhaltsverzeichnis

Vorwort . . . . . 13

**A) Die Übung – ein Zentralbegriff im Mathematikunterricht**

**1. Kennzeichnung der Übung nach ihrem didaktischen Schwerpunkt . . . . . 15**

1.1 Die Rechenfertigungsübung . . . . . 15

1.1.1 Unterscheidung Rechenfertigkeit–Rechenfähigkeit . . . . . 15

1.1.2 Das didaktische Ziel der Rechenfertigungsübung . . . . . 15

1.2 Die operative Übung . . . . . 16

1.2.1 Das operative Denken . . . . . 16

1.2.2 Die Bedeutung operativer Übungen im Mathematikunterricht . . . . . 17

1.2.3 Die operative Übung als Stufe des Lernprozesses . . . . . 17

1.3 Das Zehnminutenrechnen . . . . . 19

1.3.1 Das didaktische Ziel des Zehnminutenrechnens . . . . . 19

1.3.2 Schwerpunkte der täglichen Kurzübung . . . . . 19

1.3.3 Übungsformen . . . . . 19

1.4 Die Übung als Stufe einer Unterrichtseinheit . . . . . 19

1.4.1 Der didaktische Ort der Übung innerhalb einer Einführungsstunde . . . . . 19

1.4.2 Die Durchführung der Übung . . . . . 20

**2. Prinzipien für die Durchführung effektiver Übungen . . . . . 20**

2.1 Wechsel im Übungsvollzug . . . . . 20

2.2 Grundsätze für die Anordnung des Übungsstoffes . . . . . 20

2.2.1 Vom Leichten zum Schweren . . . . . 20

2.2.2 Die Berücksichtigung der kognitiven Funktionen . . . . . 21

2.3 Der Wechsel in der Arbeitsform . . . . . 21

2.3.1 Mündliches Rechnen . . . . . 21

2.3.2 Die schriftlichen Rechenformen . . . . . 22

2.4 Die Arbeitstechniken . . . . . 22

2.4.1 Übersicht der möglichen Arbeitstechniken . . . . . 22

2.4.2 Die Einführung neuer Arbeitstechniken . . . . . 23

2.4.3 Wann lohnt sich der Zeitaufwand? . . . . . 23

2.5 Wechsel der Sozialformen . . . . . 23

2.5.1 Arbeit mit der ganzen Klasse . . . . . 23

2.5.2 Die Alleinarbeit . . . . . 24

2.5.3 Die Partnerarbeit . . . . . 24

2.5.4 Die Gruppenarbeit . . . . . 24

2.6 Die Notwendigkeit einer Differenzierung . . . . . 24

2.7 Kontrollverfahren . . . . . 25

2.7.1 Die Selbstkontrolle . . . . . 25

2.7.2 Die Fremdkontrolle . . . . . 25

2.7.3 Die Eigenkontrolle . . . . . 26

2.8	Die Arbeitsmittel . . . . .	27
2.8.1	Lernmittelfreie Arbeitsmittel . . . . .	27
2.8.2	Ergänzende Arbeitsmittel . . . . .	28
2.8.3	Selbstgefertigte Arbeitsmittel . . . . .	28
<b>3.</b>	<b>Anmerkungen zum Übungsteil . . . . .</b>	<b>29</b>
3.1	Hinweise zur Arbeitserleichterung . . . . .	29
3.1.1	Material für die Hand des Lehrers . . . . .	29
3.1.2	Arbeitssparender Einsatz von Arbeitsblättern . . . . .	29
3.2	Die Anordnung der Übungen . . . . .	29
3.3	Die Beschreibung der Übungen . . . . .	30
3.4	Grundlegende Bezeichnungen . . . . .	31
3.4.1	Gleichungsdarstellung . . . . .	31
3.4.2	Operatordarstellung . . . . .	31

## **B) Kennzeichnung der Übungen und Durchführungsvorschläge**

### **Die Erweiterung des Zahlenraumes**

<b>1.</b>	<b>Der Zahlenraum bis 100 . . . . .</b>	<b>33</b>
1.1	Übungen zum Erkennen, Kennzeichnen, Lesen, Bestimmen und Zeigen von Zahlen und deren Mächtigkeit . . . . .	33
1.1.1	Das Zahlenband . . . . .	33
1.1.2	Die Punktetafel . . . . .	33
1.1.3	Ziffernmäßige Darstellung des Zahlenraumes . . . . .	34
1.1.4	Zeichnerische Darstellung von Zahlen . . . . .	36
1.2	Die Position einer Zahl . . . . .	36
1.2.1	Benachbarte Zahlen . . . . .	36
1.2.2	Vergleich von Zahlen . . . . .	40
1.2.3	Vergleich von Zahlen mit gleichen Ziffern . . . . .	43
1.2.4	Das Ordnen von Zahlen . . . . .	44
1.3	Einfache Rechnungen . . . . .	46
1.3.1	Zahlenfolgen . . . . .	46
1.3.2	Ergänzen auf den nächsten Zehner . . . . .	47
1.3.3	Ergänzen auf Hundert . . . . .	48
1.3.4	Das Zerlegen von Zahlen . . . . .	49
1.3.5	Halbieren/Verdoppeln . . . . .	52
<b>2.</b>	<b>Der Zahlenraum bis 1000 . . . . .</b>	<b>55</b>
2.1	Übungen zum Erkennen, Kennzeichnen, Lesen, Bestimmen und Zeigen von Zahlen und deren Mächtigkeit . . . . .	55
2.1.1	Übungsformen . . . . .	55

2.1.2	Veranschaulichungsmöglichkeiten	55
2.1.3	Gezeichnete Zahlen	56
2.1.4	Zahlenmatrix	56
2.2	Das Zerlegen von Zahlen	57
2.2.1	Die Zerlegung in Vielfache der Stufenzahlen	57
2.2.2	Die Zerlegung in Stellenwerte	59
2.2.3	Vergleich Stellenwertschreibweise und Stufenzahlschreibweise	59
2.3	Das Schreiben und Bilden von Zahlen unter besonderer Beachtung der Stellenwerte	60
2.3.1	Das Zahlendiktat	60
2.3.2	Zahlen selbst bilden	60
2.3.3	Würfelspiele	61
2.3.4	Der Vergleich von Zahlen	61
2.3.5	Das Ordnen von Zahlen	61
2.4	Einfache Rechnungen	62
2.4.1	Benachbarte Zahlen	62
2.4.2	Schrittweises Ergänzen	63
2.4.3	Zahlenfolgen	64
2.4.4	Halbieren/Verdoppeln	64
2.4.5	Übungen in den Randzehnern eines Hunderters	65
2.4.6	Vergleich von Termen einfacher Art	66
2.5	Das Rechnen mit Größen	67
2.5.1	Benennungen und ihre Abkürzungen	67
2.5.2	Die Umrechnung	68
2.5.3	Übungsformen	68
2.5.4	Variationen der Darstellung	69
<b>3.</b>	<b>Der Zahlenraum bis 1 000 000</b>	<b>70</b>
3.1	Veranschaulichungen	70
3.1.1	Das Zahlenband	70
3.1.2	Die Punktetafel für den Bereich bis 10 000	71
3.1.3	Die zeichnerische Darstellung von Zahlen	72
3.1.4	Veranschaulichung durch Längenvergleich	72
3.2	Die Einordnung einer Zahl in unser Zahlensystem	72
3.2.1	Benachbarte Zahlen	72
3.2.2	Das Ordnen von Zahlen	76
3.2.3	Zerlegung in Vielfache der Stufenzahlen	77
3.2.4	Zerlegung in Stellenwerte	79
3.2.5	Das Suchen und Bilden von Zahlen	79
3.2.6	Würfelspiele	80
3.3	Der dekadische Aufbau unseres Zahlensystems	80
3.3.1	Die Einführung der Multiplikation mit Zehnerpotenzen durch Operatoren	80
3.3.2	Verknüpfungen reversibler Operationen mit Zehnerpotenzen	83
3.3.3	Umkehroperatoren	86
3.3.4	Die Addition/Subtraktion von Zehnerpotenzen und deren Vielfache	87
3.3.5	Analogiebildungen	90

3.4	Einfache Rechnungen	92
3.4.1	Schrittweises Ergänzen	92
3.4.2	Halbieren/Verdoppeln	94
3.4.3	Zahlenfolgen	94
3.5	Übungen an den Nahtstellen	96
3.5.1	Übungen im ersten Hunderter eines Tausenders	96
3.5.2	Übungen im letzten Hunderter eines Tausenders	97
3.5.3	Zeichnerische Veranschaulichung	98

## Der additive Bereich

<b>4.</b>	<b>Operative Übungen zum Verständnis der Rechengesetze</b>	<b>100</b>
4.1	Die Einführung der Addition und Subtraktion	100
4.1.1	Die Vereinigungsmenge	100
4.1.2	Die Restmenge	101
4.1.3	Veranschaulichungsmöglichkeiten	101
4.1.4	Darstellung der Addition/Subtraktion auf Zahlenschemata	104
4.1.5	Das Operatormodell	105
4.2	Das Kommutativgesetz	108
4.2.1	Inhalt des Kommutativgesetzes	108
4.2.2	Zeichnerische Darstellungen	109
4.2.3	Darstellung auf Zahlenschemata	110
4.2.4	Übungsvarianten bei ziffernmäßiger Darstellung	110
4.2.5	Der Umkehroperator	112
4.3	Das Assoziativgesetz der Addition	114
4.3.1	Inhalt des Assoziativgesetzes	114
4.3.2	Zeichnerische Darstellungen	114
4.3.3	Wir suchen den einfachsten Lösungsweg	115
4.4	Die Ausgleichsgesetze	117
4.4.1	Inhalt der Ausgleichsgesetze	117
4.4.2	Das Zerlegen von Zahlen	118
4.4.3	Suchen gleichwertiger Terme	121
4.4.4	Wir suchen den vorteilhaftesten Lösungsweg	123
4.5	Das Einüben grundlegender additiver Kenntnisse	124
4.5.1	Kennzeichnung der grundlegenden additiven Kenntnisse	124
4.5.2	Einübung durch dekadische Analogien	124
4.5.3	Variationen der Darstellung	125
4.5.4	Nachbaraufgaben	127
4.6	Übungen zum besseren Verständnis des Zehnerüberganges	128
4.6.1	Der fließende Übergang	128
4.6.2	Die Addition/Subtraktion mit zerlegten Zahlen	130
4.6.3	Die Addition/Subtraktion von gemischten Zehnerzahlen	132
4.7	Abziehen und Ergänzen	135
4.7.1	Unterscheidung	135
4.7.2	Zeichnerische Darstellungen	136
4.7.3	Ziffernmäßige Darstellungen	138

<b>5.</b>	<b>Übungen zur Neueinführung von Rechentechniken</b>	139
5.1	Die halbschriftliche Addition	139
5.1.1	Die verschiedenen Wege bei der halbschriftlichen Addition	139
5.1.2	Vertiefende Übungen	140
5.1.3	Ausnützen von Rechenvorteilen durch Anwendung der Ausgleichsgesetze	142
5.2	Die halbschriftliche Subtraktion	142
5.3	Die schriftliche Addition	143
5.3.1	Vorübungen mit der Stellenwerttafel	143
5.3.2	Die Addition ohne Übergänge	144
5.3.3	Die Addition mit Übergängen	145
5.4	Die schriftliche Subtraktion	148
5.4.1	Zwei methodische Wege der schriftlichen Subtraktion	148
5.4.2	Die schriftliche Subtraktion ohne Übergang	149
5.4.3	Die schriftliche Subtraktion mit Übergängen	150
<b>6.</b>	<b>Automatisierende Übungen</b>	152
6.1	Mechanische Übungen mit dem Ziel der sicheren Beherrschung der Rechentechniken	152
6.1.1	Die Aufgaben sind einzeln lösbar	152
6.1.2	Aufgabenstellungen mit den Zahlenschemata	156
6.1.3	Die Aufgaben sind selbst zu bilden	159
6.1.4	Ergänzungsaufgaben	161
6.1.5	Kettenrechnungen mit begrenzter Gliederzahl	163
6.1.6	Rundläufe	168
6.1.7	Rechenuhr und Rechenrad	169
6.2	Übungen, die zugleich die Kombinationsfähigkeit fördern	172
6.2.1	Die Verknüpfung zweier Zahlen ist gesucht	172
6.2.2	Der Rechenturm	173
6.2.3	Relationen	174
6.2.4	Mehrere Zahlen sind zu verknüpfen	176
6.2.5	Zauberquadrate	179
6.2.6	Weg durch Zahlenquadrate suchen	184

## Der multiplikative Bereich

<b>7.</b>	<b>Die Einführung der multiplikativen Operationen</b>	186
7.1	Die Multiplikation	186
7.1.1	Vorkurs	186
7.1.2	Kennenlernen der Multiplikation als verkürzte Addition	187
7.1.3	Veranschaulichungsmöglichkeiten	188
7.1.4	Darstellung auf den Grundschemata	189
7.1.5	Die Einführung der Multiplikation über die Produktmenge	190
7.1.6	Der Maloperator	192
7.2	Die Division	192
7.2.1	Unterscheidung von Messen und Teilen	192

7.2.2	Die Einführung der Division im Sinne des Messens	192
7.2.3	Die Division im Sinne des Verteilens	195
7.2.4	Zeichnerische Gegenüberstellung Messen – Verteilen	196
7.2.5	Der Geteiltoperator	198
7.3	Die Einführung der Einmaleinsreihen	198
7.3.1	Zeichnerische Darstellungen	198
7.3.2	Der zahlenmäßige Aufbau einer Einmaleinsreihe	200
<b>8.</b>	<b>Operative Übungen zum Verständnis der multiplikativen Rechengesetze</b>	<b>201</b>
8.1	Das Kommutativgesetz	201
8.1.1	Inhalt des Kommutativgesetzes	201
8.1.2	Zeichnerische Darstellungen	201
8.1.3	Einzeichnen der Tauschaufgaben in die Grundschemata	203
8.1.4	Gezeichnete Aufgaben in Gleichungen umsetzen	204
8.1.5	Übungsvarianten bei ziffernmäßiger Darstellung	204
8.1.6	Übungen, die die Reversibilität besonders berücksichtigen	207
8.2	Das Assoziativgesetz	209
8.2.1	Inhalt des Assoziativgesetzes	209
8.2.2	Zeichnerische Darstellungen	209
8.2.3	Gegenüberstellung im Baumdiagramm	212
8.2.4	Das Erstellen gleichwertiger Multiplikationsfolgen mit vorgegebenen Zahlen	213
8.2.5	Die Anwendung des Assoziativgesetzes der Multiplikation bei der Division	214
8.2.6	Multiplikative Zerlegungen	216
8.2.7	Die Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren	218
8.2.8	Die praktische Anwendung der multiplikativen Zerlegung	219
8.3	Das Distributivgesetz der Multiplikation	221
8.3.1	Inhalt des Distributivgesetzes	221
8.3.2	Zeichnerische Darstellungen	221
8.3.3	Ein zweistelliger Faktor wird additiv zerlegt	223
8.3.4	Die Anwendung des Distributivgesetzes bei der Division durch Zerlegen in Vielfache des Divisors	225
8.3.5	Halbieren/Verdoppeln	227
8.3.6	Der Aufbau neuer Einmaleinsreihen durch Addition oder Subtraktion bereits bekannter Reihen	231
8.4	Die Ausgleichsgesetze	232
8.4.1	Inhalt der Ausgleichsgesetze	232
8.4.2	Zeichnerische Darstellungen	233
8.4.3	Ziffernmäßige Darstellungen	234
8.4.4	Das Bewußtmachen des Veränderungsoperators	234
8.4.5	Die Russische Multiplikation	236
8.4.6	Vereinfachen der Division durch Kürzen	236
<b>9.</b>	<b>Operative Übungen zum Verständnis der multiplikativen Verknüpfungen</b>	<b>237</b>
9.1	Das multiplikative Umfeld einer Zahl	237
9.1.1	Nachbaraufgaben	237

9.1.2	Nachbareinmaleinszahlen suchen	239
9.1.3	Rechnen mit Restklassen	241
9.2	Das Herausstellen verwandter Beziehungen	244
9.2.1	Kennzeichnung der Übungen	244
9.2.2	Zeichnerische Darstellung verwandter Beziehungen	244
9.2.3	Übungsvarianten	246
9.2.4	Die Auswirkungen multiplikativer Veränderungen beim Quotienten	249
9.3	Das Erarbeiten von Teiler- und Vielfachenbeziehungen	253
9.3.1	Die Teilermenge	253
9.3.2	Gemeinsame Teiler	258
9.3.3	Die Vielfachenmenge	260
9.3.4	Gemeinsame Vielfache	264
<b>10.</b>	<b>Automatisierende Übungen</b>	<b>267</b>
10.1	Mechanische Übungen mit dem Ziel der Beherrschung der Einmaleinsreihen	268
10.1.1	Das Einprägen einzelner Reihen	268
10.1.2	Das gleichzeitige Üben mehrerer Einmaleinsreihen	273
10.1.3	Der Vergleich multiplikativer Terme	279
10.1.4	Würfelspiele	282
10.2	Übungen, die zugleich die Kombinationsfähigkeit fördern	284
10.2.1	Multiplikative Einzelverknüpfungen sind gesucht	284
10.2.2	Mehrere multiplikative Terme sind zu verquicken	285
10.3	Die Verknüpfung additiver und multiplikativer Rechenoperationen	291
10.3.1	Die Reihenfolge der Operationen ist vorgeschrieben	291
10.3.2	Die Operationen sind variabel	296
<b>11.</b>	<b>Die Einführung neuer multiplikativer Rechentechniken</b>	<b>304</b>
11.1	Die Zehner Vielfachen	304
11.1.1	Zeichnerische Darstellungen	304
11.1.2	Die Multiplikation in Stellenwertschreibweise	305
11.1.3	Additive Zerlegung des Multiplikators/Dividenden in gleich große Summanden	306
11.1.4	Multiplikative Zerlegung des Multiplikators/Divisors	307
11.1.5	Vergleich zwischen der Einmaleinsreihe und den dazugehörigen Zehner Vielfachen	311
11.1.6	Operative Übungen mit Zehner Vielfachen	312
11.1.7	Anwendungsbeispiele	316
11.1.8	Rechenfertigungsübungen	318
11.2	Die halbschriftliche Multiplikation	318
11.2.1	Wiederholende Übungen	318
11.2.2	Die Multiplikation der Vielfachen der Stufenzahlen	318
11.2.3	Darstellungsvarianten	319
11.2.4	Die Übung abweichender Zerlegungsformen	321
11.3	Die halbschriftliche Division	323
11.3.1	Die Zerlegung des Dividenden	323

11.3.2	Die schrittweise Einführung der halbschriftlichen Division . . . . .	325
11.3.3	Darstellungsvarianten . . . . .	327
11.3.4	Die Übung abweichender Zerlegungsformen . . . . .	328
11.4	Die schriftliche Multiplikation . . . . .	330
11.4.1	Der Multiplikator ist einstellig . . . . .	330
11.4.2	Die Multiplikation mit glatten Zehnerzahlen . . . . .	333
11.4.3	Die Multiplikation mit gemischten Zahlen . . . . .	334
11.4.4	Die Multiplikation drei- und mehrstelliger Zahlen . . . . .	336
11.5	Die schriftliche Division . . . . .	337
11.5.1	Die Division mit einstelligem Divisor im Stellenwertschema . . . . .	337
11.5.2	Das Normalverfahren der schriftlichen Division mit einstelligem Divisor . . . . .	341
11.5.3	Das überschlagende Rechnen . . . . .	343
11.5.4	Dividieren mit zweistelligen Divisoren . . . . .	345
<b>12.</b>	<b>Übungen, die die schriftliche Beherrschung der Grundrechenarten voraussetzen . . . . .</b>	<b>347</b>
12.1	Rechenfertigungsübungen . . . . .	347
12.1.1	Einzelterme sind zu lösen . . . . .	347
12.1.2	Vergleich von Termen . . . . .	350
12.1.3	Kettenrechnungen . . . . .	352
12.2	Übungen, die zugleich die Kombinationsfähigkeit fördern . . . . .	355
12.2.1	Die Operationen sind festgelegt . . . . .	355
12.2.2	Die Operationen sind variabel . . . . .	357
12.2.3	Zerlegungen . . . . .	359
	Verzeichnis der mehrfach einsetzbaren Folien . . . . .	363
	Quellenverzeichnis . . . . .	365