

K. Meetz · W. L. Engl

# Elektromagnetische Felder

Mathematische und physikalische  
Grundlagen

Anwendungen in Physik und  
Technik

Mit 192 Abbildungen

Springer-Verlag  
Berlin · Heidelberg · New York 1980

# Inhaltsverzeichnis

<u>1. Geometrische Algebra</u> .....	1
1.1. Vektoren .....	1
1.1.1. Der Vektorraum $V^3$ .....	1
1.1.2. Ortsvektoren und Koordinatensysteme .....	5
1.1.3. Physikalisch äquivalente Koordinatensysteme .....	9
1.2. Multivektoren .....	13
1.2.1. Äußere Algebra .....	13
1.2.2. Innere Produkte .....	18
1.2.3. Skalarprodukte .....	23
1.2.4. Orientierung .....	27
1.2.5. Der *-Operator .....	34
1.3. Tensoren .....	39
1.3.1. Tensoralgebra .....	39
1.3.2. Verjüngung und Skalarprodukte .....	43
Aufgaben .....	44
<u>2. Geometrische Analysis</u> .....	47
2.1. Tangenten und Kotangenten .....	47
2.2. Multivektorfelder und Multiformen .....	54
2.3. Differentiation von Multivektorfeldern und Multiformen .....	61
2.3.1. Affine Übertragung und kovariante Ableitung .....	61
2.3.2. Äußere Ableitung .....	66
2.3.3. Innere Ableitung .....	68
2.4. Integration von Multiformen und Multivektorfeldern .....	71
2.4.1. Linienelement, Flächenelement und Volumenelement .....	71
2.4.2. Integration von Multiformen .....	76
2.4.3. Der Satz von Stokes .....	79
Aufgaben .....	83
<u>3. Das elektrische Feld ruhender Ladungen</u> .....	87
3.1. Elektrische Ladung .....	87
3.2. Die elektrische Feldstärke .....	89

3.2.1.	Definition der elektrischen Feldstärke im Vakuum und in Materie .....	89
3.2.2.	Die Feldgleichung und die Grenzbedingung für die elektrische Feldstärke .....	93
3.2.3.	Das elektrische Potential .....	97
3.3.	Die elektrische Verschiebungsdichte .....	101
3.3.1.	Definition der elektrischen Verschiebungsdichte im Vakuum und in Materie .....	101
3.3.2.	Die Feldgleichung und die Grenzbedingung für die elektrische Verschiebungsdichte .....	104
3.4.	Der Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und Verschiebungsdichte .....	108
3.4.1.	Die Materialgleichung .....	108
3.4.2.	Die Poissongleichung und die Grenzbedingungen für das Potential .....	111
3.4.3.	Der Kondensator und seine Kapazität .....	114
Aufgaben	.....	121
<u>4.</u>	<u>Randwertaufgaben für statische elektrische Felder</u> .....	124
4.1.	Randwertprobleme .....	124
4.1.1.	Eindeutigkeit der Lösung .....	124
4.1.2.	Grundlösung und Greensche Funktion .....	128
4.1.3.	Singuläre Funktionen und Distributionen .....	132
4.1.4.	Die Maxwell'schen Kapazitätskoeffizienten .....	136
4.2.	Potentialaufgaben in der Ebene .....	141
4.2.1.	Feldgleichungen in der Ebene .....	141
4.2.2.	Holomorphe Funktionen .....	143
4.2.3.	Konstruktion der Greenschen Funktion .....	148
4.2.4.	Multipole .....	151
4.2.5.	Separation der Variablen. Fourierentwicklung .....	156
4.3.	Potentialaufgaben im Raum .....	162
4.3.1.	Potentiale singulärer Ladungsverteilungen .....	162
4.3.2.	Konstruktion der Greenschen Funktion durch Spiegelung .....	165
4.3.3.	Multipole .....	172
4.3.4.	Polarisation .....	176
4.3.5.	Entwicklung nach Kugelfunktionen .....	179
Aufgaben	.....	188
<u>5.</u>	<u>Das magnetische Feld stationärer Ströme</u> .....	195
5.1.	Der stationäre elektrische Strom .....	195
5.1.1.	Die Stromverteilung .....	195
5.1.2.	Die Feldgleichung und die Grenzbedingung für die Stromdichte .....	196
5.2.	Die magnetische Induktion .....	198
5.2.1.	Definition der magnetischen Induktion im Vakuum und in Materie .....	198

5.2.2. Die Feldgleichung und die Grenzbedingung für die magnetische Induktion .....	201
5.2.3. Das magnetische Potential .....	204
5.3. Die magnetische Feldstärke .....	207
5.3.1. Definition der magnetischen Feldstärke im Vakuum und in Materie .....	207
5.3.2. Die Feldgleichung und die Grenzbedingung für die magnetische Feldstärke .....	209
5.4. Der Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion und magnetischer Feldstärke .....	212
5.4.1. Die Materialgleichung .....	212
5.4.2. Die Feldgleichung und die Grenzbedingungen für das magnetische Potential .....	216
5.4.3. Beispiele einfacher magnetischer Felder .....	218
Aufgaben .....	222
<u>6. Randwertaufgaben für stationäre magnetische Felder</u> .....	226
6.1. Randwertprobleme für das Vektorpotential .....	226
6.1.1. Eindeutigkeit der Lösung. Eichtransformationen .....	226
6.1.2. Grundlösungen und Ströme .....	229
6.1.3. Die Induktivitätskoeffizienten .....	234
6.2. Lösung magnetischer Potentialaufgaben .....	239
6.2.1. Singuläre Stromverteilungen. Das skalare magnetische Potential .....	239
6.2.2. Multipole .....	248
6.2.3. Magnetisierung .....	251
6.2.4. Entwicklung nach vektoriellen Kugelfunktionen .....	258
Aufgaben .....	263
<u>7. Das elektromagnetische Feld</u> .....	268
7.1. Die Maxwell'schen Gleichungen .....	268
7.2. Die Energie des elektromagnetischen Feldes .....	271
7.2.1. Der Energiesatz und der Sommerfeld'sche Eindeutigkeitsbeweis .....	271
7.2.2. Die Energie in statischen und quasistatischen Feldern .....	276
7.2.3. Die Energie in stationären und quasistationären Feldern .....	282
7.3. Elektromagnetische Wellen .....	289
7.3.1. Ebene Wellen .....	289
7.3.2. Lösung des Anfangswertproblems für die Maxwell'schen Gleichungen .....	300
7.3.3. Die elektrodynamischen Potentiale .....	303
7.3.4. Das elektromagnetische Feld eines schwingenden Dipols .....	309
7.3.5. Das quasistationäre Feld .....	319
Aufgaben .....	323

<u>8. Elektrische und magnetische Materialeigenschaften</u> .....	327
8.1. Das elektrische Strömungsfeld in Leitern .....	327
8.1.1. Das stationäre elektrische Feld und seine Quellen .....	327
8.1.2. Die Materialgleichung für metallische Leiter .....	330
8.1.3. Die Feldgleichung und die Grenzbedingungen für das Potential des elektrischen Strömungsfeldes .....	336
8.1.4. Eine Analogie zwischen dem elektrischen Strömungsfeld und dem elektrostatischen Feld .....	336
8.2. Dispersion der Materialkonstanten .....	339
8.2.1. Materialgleichungen für zeitabhängige Felder .....	339
8.2.2. Dispersionsrelationen .....	348
8.2.3. Die Passivitätsbedingung .....	353
8.3. Die Maxwellschen Gleichungen für langsam bewegte Medien .....	356
8.3.1. Feldgleichungen für bewegte Medien .....	356
8.3.2. Die Invarianz des Vakuums .....	361
8.3.3. Materialgleichungen für langsam bewegte Medien .....	365
8.3.4. Elektrische und magnetische Feldkräfte .....	367
Aufgaben .....	381
<u>9. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen</u> .....	390
9.1. Dispersive Wellen in einem homogenen und isotropen Medium .....	390
9.1.1. Feldgleichungen für niederfrequente und hochfrequente Wellen .....	390
9.1.2. Die Klein-Gordon-Gleichung .....	393
9.1.3. Die Telegrafengleichung .....	399
9.2. Randwertaufgaben für den Halbraum .....	403
9.2.1. Reflexion und Absorption niederfrequenter Wellen .....	403
9.2.2. Oberflächenwellen .....	409
9.2.3. Ausbreitung eines Signals in einem dispersiven Halbraum .....	416
9.3. Geführte Wellen in zylindersymmetrischen Anordnungen .....	422
9.3.1. Zylindersymmetrische Randwertprobleme .....	422
9.3.2. Ideale Wellenleiter .....	424
9.3.3. Drahtwellen .....	441
9.3.4. Die Leitungsgleichungen .....	449
9.4. Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen .....	457
9.4.1. Entwicklung nach Multipolfeldern .....	457
9.4.2. Vertikalantenne über einem leitenden Halbraum .....	464
9.4.3. Das Reziprozitätstheorem .....	470
Aufgaben .....	473
<u>10. Netzwerktheorie</u> .....	481
10.1. Eine Verallgemeinerung der Maxwellschen Kapazitäts- und Potentialkoeffizienten .....	482
10.2. Gleichstromnetzwerke .....	487
10.2.1. Der lineare quellenfreie $k$ -Pol .....	487
10.2.2. Der lineare Zweipol .....	491

10.2.3. Das Zweipolnetzwerk . . . . .	497
10.2.4. Die Kirchhoffschen Gleichungen . . . . .	503
10.2.5. Weitere Formulierungen der Netzwerkaufgabe . . . . .	509
10.3. Wechselstromnetzwerke . . . . .	514
10.3.1. Die Kirchhoffschen Gleichungen bei zeitabhängigen Feldern	514
10.3.2. Der lineare zeitinvariante passive Zweipol und das n-Tor..	517
10.3.3. Das Reziprozitätstheorem für Netzwerke. . . . .	527
10.3.4. Nichtlineare Netzwerke . . . . .	530
Aufgaben. . . . .	540
<u>11. Spezielle Relativitätstheorie</u> . . . . .	547
11.1. Das Relativitätsprinzip . . . . .	547
11.1.1. Multiformen und Feldgleichungen in der Raum-Zeit . . . . .	547
11.1.2. Geometrie der Raum-Zeit. . . . .	554
11.1.3. Äquivalente Bezugssysteme und Lorentztransformationen . .	557
11.1.4. Skalentransformationen und konforme Transformationen. . .	564
11.2. Lorentz-invariante Elektrodynamik. . . . .	566
11.2.1. Transformation der Feldgrößen . . . . .	566
11.2.2. Erhaltung von Energie und Impuls . . . . .	569
11.2.3. Lösung des Anfangswertproblems . . . . .	575
11.2.4. Greensche Funktionen . . . . .	580
11.3. Lorentz-invariante Mechanik. . . . .	584
11.3.1. Kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes . . . . .	584
11.3.2. Bewegung eines geladenen Massenpunktes im äußeren Feld.	591
Aufgaben. . . . .	593
<u>12. Elektromagnetische Wechselwirkung bewegter Ladungen</u> . . . . .	598
12.1. Das Feld einer bewegten Punktladung . . . . .	598
12.1.1. Lienard-Wiechert-Potentiale . . . . .	598
12.1.2. Das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung . . . . .	601
12.1.3. Das Feld einer beschleunigten Punktladung. . . . .	607
12.2. Bewegungsgleichungen für punktförmige Ladungen. . . . .	616
12.2.1. Selbstwechselwirkung. . . . .	616
12.2.2. Die Lorentz-Dirac-Gleichung. . . . .	622
12.2.3. Mehrere Ladungen. Störungstheorie . . . . .	627
12.3. Wechselwirkungsprozesse. . . . .	630
12.3.1. Streuung im äußeren Feld . . . . .	630
12.3.2. Thomson-Streuung . . . . .	632
12.3.3. Bremsstrahlung . . . . .	637
Aufgaben . . . . .	643
<u>Anhang</u> . . . . .	649
<u>Literaturverzeichnis</u> . . . . .	658
<u>Sachverzeichnis</u> . . . . .	660