

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung . . . . .	XV
<b>Kapitel A. Garbentheorie</b>	
§ 0. Garben und Prägarben von Mengen . . . . .	1
1. Garben und Garbenabbildungen . . . . .	1
2. Summengarben. Untergarben. Einschränkungen . . . . .	1
3. Schnittflächen . . . . .	2
4. Prägarben. Der Schnittfunktor $\Gamma$ . . . . .	2
5. Übergang von Prägarben zu Garben. Der Funktor $\tilde{F}$ . . . . .	3
6. Die Garbenbedingungen G1 und G2 . . . . .	3
7. Direkte Produkte . . . . .	4
8. Bildgarben . . . . .	5
9. Garbenverklebung . . . . .	5
§ 1. Garben mit algebraischer Struktur . . . . .	6
1. Garben von Gruppen, Ringen und $\mathcal{R}$ -Moduln . . . . .	6
2. Garbenhomomorphismen. Untergarben . . . . .	7
3. Restklassengarben . . . . .	8
4. Garben von $k$ -Stellenalgebren . . . . .	8
5. Algebraische Reduktion . . . . .	9
6. Prägarben mit algebraischer Struktur . . . . .	9
7. Zur Exaktheit von $\tilde{F}$ und $\Gamma$ . . . . .	10
§ 2. Kohärente Garben und kohärente Funktoren . . . . .	10
1. Endliche Garben . . . . .	10
2. Relationsendliche Garben . . . . .	11
3. Kohärente Garben . . . . .	11
4. Kohärenz trivialer Fortsetzungen . . . . .	12
5. Die Funktoren $\otimes$ und $\wedge^p$ . . . . .	13
6. Der Funktor $\mathcal{M}_{\text{ann}}$ . Annulatorgarben . . . . .	14
7. Quotientengarben . . . . .	14
§ 3. Komplexe Räume . . . . .	15
1. $k$ -algebrisierte Räume . . . . .	15
2. Differenzierbare und komplexe Mannigfaltigkeiten . . . . .	16
3. Komplexe Räume. Holomorphe Abbildungen . . . . .	17
4. Topologische Eigenschaften komplexer Räume . . . . .	18
5. Analytische Mengen . . . . .	19
6. Dimensionstheorie . . . . .	20
7. Reduktion komplexer Räume . . . . .	21
8. Normale komplexe Räume . . . . .	22

§ 4. Weiche und weiche Garben . . . . .	23
1. Weiche Garben . . . . .	23
2. Weichheit der Strukturgarbe differenzierbarer Mannigfaltigkeiten . . . . .	24
3. Welke Garben . . . . .	26
4. Exaktheit des Funktors $\Gamma$ für weiche und weiche Garben . . . . .	27

**Kapitel B. Cohomologietheorie**

§ 1. Welche Cohomologietheorie . . . . .	28
1. Cohomologie von Komplexen . . . . .	28
2. Welche Cohomologietheorie . . . . .	30
3. Formales De Rhamsches Lemma . . . . .	32
§ 2. Čechsche Cohomologietheorie . . . . .	33
1. Čechkomplexe . . . . .	33
2. Alternierende Čechkomplexe . . . . .	34
3. Verfeinerungen. Čechsche Cohomologiemoduln $\check{H}^q(X, S)$ . . . . .	35
4. Alternierende Čechsche Cohomologiemoduln $\check{H}_q(X, S)$ . . . . .	36
5. Verschwindungssatz für kompakte Quadere . . . . .	37
6. Lange exakte Cohomologiesequenz . . . . .	38
§ 3. Leraysches Lemma und Isomorphiesatz $\check{H}_a^q(X, \mathcal{S}) \cong \check{H}^q(X, \mathcal{S}) \cong H^q(X, \mathcal{S})$ . . . . .	40
1. Kanonische Garbenauflösung zu einer Überdeckung . . . . .	40
2. Azyklische Überdeckungen . . . . .	42
3. Leraysches Lemma . . . . .	43
4. Der Isomorphiesatz $\check{H}_a^q(X, \mathcal{S}) \cong \check{H}^q(X, \mathcal{S}) \cong H^q(X, \mathcal{S})$ . . . . .	43

**Kapitel I. Kohärenzsatz für endliche holomorphe Abbildungen**

§ 1. Endliche Abbildungen und Bildgarben . . . . .	46
1. Abgeschlossene und endliche Abbildungen . . . . .	46
2. Die Bijektion $f_*(\mathcal{S})_y \rightarrow \prod_{i=1}^l \mathcal{S}_{x_i}$ . . . . .	47
3. Exaktheit des Funktors $f_*$ . . . . .	47
4. Die Isomorphismen $H^q(X, \mathcal{S}) \cong H^q(Y, f_*(\mathcal{S}))$ . . . . .	48
5. Die $\mathcal{O}_Y$ -Modulisomorphie $\tilde{f}: f_*(\mathcal{S})_y \rightarrow \prod_i \mathcal{S}_{x_i}$ . . . . .	49
§ 2. Allgemeiner Weierstraßscher Divisionssatz und Weierstraßisomorphismus . . . . .	49
1. Stetigkeit der Wurzeln . . . . .	49
2. Allgemeiner Weierstraßscher Divisionssatz . . . . .	50
3. Der Weierstraßisomorphismus $\mathcal{O}_B^b \cong \pi_*(\mathcal{O}_A)$ . . . . .	51
4. Kohärenz des Funktors $\pi_*$ . . . . .	52
§ 3. Der Kohärenzsatz für endliche holomorphe Abbildungen . . . . .	53
1. Lokaler Projektionssatz . . . . .	53
2. Endliche holomorphe Abbildungen (lokaler Fall) . . . . .	54
3. Endliche holomorphe Abbildungen und Kohärenz . . . . .	55

**Kapitel II. Differentialformen und Dolbeaulttheorie**

§ 1. Komplex-wertige Differentialformen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten . . . . .	57
1. Tangentialvektoren . . . . .	57
2. Vektorfelder . . . . .	59
3. Komplexe $r$ -Vektoren . . . . .	60
4. Lifting von $r$ -Vektoren . . . . .	61
5. Komplex-wertige Differentialformen . . . . .	62
6. Äußere Ableitung . . . . .	63
7. Lifting von Differentialformen . . . . .	64
8. De Rhamsche Cohomologiegruppen . . . . .	65
§ 2. Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten . . . . .	66
1. Die Garben $\mathcal{A}^{1,0}, \mathcal{A}^{0,1}$ und $\Omega^1$ . . . . .	66
2. Die Garben $\mathcal{A}^{p,q}$ und $\Omega^p$ . . . . .	67
3. Die Ableitungen $\partial$ und $\bar{\partial}$ . . . . .	69
4. Holomorphe Lifting von $(p,q)$ -Formen . . . . .	72
§ 3. Das Lemma von Grothendieck . . . . .	73
1. Gebietsintegrale. Der Operator $T$ . . . . .	73
2. Vertauschbarkeit von $T$ mit partieller Differentiation . . . . .	74
3. Cauchysche Integralformel und die Gleichung $T \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f$ . . . . .	75
4. Lemma von Grothendieck . . . . .	76
§ 4. Dolbeaultsche Cohomologietheorie . . . . .	78
1. Lösung des $\bar{\partial}$ -Problems für kompakte Produktmengen . . . . .	79
2. Dolbeaultsche Cohomologiegruppen . . . . .	80
3. Analytische De Rham Theorie . . . . .	82
Supplement zu § 4.1. Ein Satz von Hartogs . . . . .	82

**Kapitel III. Theoreme A und B für kompakte Quadern im  $\mathbb{C}^n$** 

§ 1. Heftungslemmata von Cousin und Cartan . . . . .	85
1. Lemma von Cousin . . . . .	85
2. Beschränkte holomorphe Matrizen . . . . .	87
3. Lemma von Cartan . . . . .	89
§ 2. Verheftung von Garbenepimorphismen . . . . .	91
1. Approximationssatz von Runge . . . . .	92
2. Heftungslemma für Garbenepimorphismen . . . . .	94
§ 3. Theoreme A und B . . . . .	98
1. Kohärente analytische Garben über kompakten Quadern . . . . .	98
2. Formulierung der Theoreme A und B. Reduktion von Theorem B auf Theorem A . . . . .	99
3. Beweis von Theorem A . . . . .	100

**Kapitel IV. Steinsche Räume**

§ 1. Der Verschwindungssatz $H^q(X, \mathcal{S})=0$ . . . . .	103
1. Steinsche Mengen. Folgerungen aus Theorem B . . . . .	103
2. Konstruktion Steinscher Kompakta mittels des Kohärenzsatzes für endliche Abbildungen	105

3. Ausschöpfung komplexer Räume durch Steinsche Kompakta . . . . .	105
4. Die Gleichungen $H^q(X, \mathcal{S})=0$ für $q \geq 2$ . . . . .	106
5. Die Gleichung $H^1(X, \mathcal{S})=0$ . Steinsche Ausschöpfungen . . . . .	108
 § 2. Schwache Holomorphekonvexität und Pflaster . . . . .	111
1. Holomorph-konvexe Hülle . . . . .	111
2. Holomorph-konvexe Räume . . . . .	113
3. Pflaster . . . . .	114
4. Pflasterausschöpfungen. Schwach holomorph-konvexe Räume . . . . .	116
5. Holomorphekonvexität und unbeschränkte holomorphe Funktionen . . . . .	118
 § 3. Holomorph-vollständige Räume . . . . .	120
1. Analytische Quadern . . . . .	120
2. Holomorph-ausbreitbare Räume . . . . .	121
3. Holomorph-vollständige Räume . . . . .	121
 § 4. Quaderausschöpfungen sind Steinsch . . . . .	122
1. Gute Seminormen . . . . .	122
2. Verträglichkeitssatz . . . . .	123
3. Konvergenzsatz . . . . .	124
4. Approximationssatz . . . . .	125
5. Quaderausschöpfungen sind Steinsch . . . . .	127

## Kapitel V. Anwendungen der Theoreme A und B

 § 1. Beispiele Steinscher Räume . . . . .	129
1. Standardkonstruktionen . . . . .	129
2. Steinsche Überdeckungen . . . . .	131
3. Resträume komplexer Räume . . . . .	132
4. Die Räume $\mathbb{C}^2 \setminus 0$ und $\mathbb{C}^3 \setminus 0$ . . . . .	134
5. Klassische Beispiele . . . . .	137
6. Steinsche Gruppen . . . . .	140
 § 2. Cousin-Probleme und Poincaré-Problem . . . . .	140
1. Cousin I-Problem . . . . .	141
2. Cousin II-Problem . . . . .	142
3. Poincaré-Problem . . . . .	144
4. Die exakte Exponentialsequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 1$ . . . . .	146
5. Okasches Prinzip . . . . .	149
 § 3. Divisorenklassen und lokal-freie analytische Garben vom Rang 1 . . . . .	150
1. Divisoren und lokal-freie Garben vom Rang 1 . . . . .	150
2. Der Isomorphismus $H^1(X, \mathcal{O}^*) \cong LF(X)$ . . . . .	151
3. Divisorenklassengruppe Steinscher Räume . . . . .	152
 § 4. Garbentheoretische Charakterisierung Steinscher Räume . . . . .	154
1. Zykeln und globale holomorphe Funktionen . . . . .	154
2. Äquivalenzkriterium . . . . .	155
3. Reduktionssatz . . . . .	156
4. Differentialformen auf Steinschen Mannigfaltigkeiten . . . . .	158
5. Topologische Eigenschaften Steinscher Räume . . . . .	159

§ 5. Garbentheoretische Charakterisierung Steinscher Bereiche im $\mathbb{C}^m$	161
1. Induktionsprinzip	161
2. Die Gleichungen $H^1(B, \mathcal{O}_B) = \dots = H^{m-1}(B, \mathcal{O}_B) = 0$	162
3. Darstellung der Eins	163
4. Charaktersatz	164
§ 6. Topologisierung von Schnittmoduln kohärenter Garben	166
0. Frécheträume	166
1. Topologie der kompakten Konvergenz	167
2. Eindeutigkeitssatz	168
3. Existenzsatz	169
4. Eigenschaften der kanonischen Topologie	171
5. Topologisierung von $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ und $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$	172
6. Reduzierte komplexe Räume und kompakte Konvergenz	173
7. Konvergente Reihen	174
§ 7. Charaktertheorie Steinscher Algebren	178
1. Charaktere und Charakterideale	179
2. Endlichkeitslemma für Charakterideale	180
3. Die Homöomorphie $\Xi: X \rightarrow X(T)$	182
4. Komplex-analytische Struktur von $X(T)$	184

**Kapitel VI. Endlichkeitssatz**

§ 1. Quadrat-integrierbare holomorphe Funktionen	189
1. Der Raum $\mathcal{O}_h(B)$	189
2. Bergmansche Ungleichung	190
3. Die Hilberträume $\mathcal{O}_h^k(B)$	191
4. Saturierte Mengen. Minimumsprinzip	192
5. Lemma von Schwarz	192
§ 2. Monotone Orthogonalbasen	193
1. Monotonie	194
2. Untergrad	194
3. Konstruktion monotoner Orthogonalbasen mittels Minimalfunktionen	195
§ 3. Maßatlanten	196
1. Existenz	197
2. Der Hilbertraum $C_h^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$	198
3. Der Hilbertraum $Z_h^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$	199
4. Verfeinerungen	200
§ 4. Beweis des Endlichkeitssatzes	202
1. Glättungslemma	202
2. Endlichkeitslemma	203
3. Beweis des Endlichkeitssatzes	204

**Kapitel VII. Kompakte Riemannsche Flächen**

§ 1. Divisoren und lokal-freie Garben $\mathcal{F}(D)$	206
0. Divisoren	206
1. Divisoren meromorpher Schnittflächen	207

2. Garben $\mathcal{F}(D)$	208
3. Garben $\mathcal{O}(D)$	209
 § 2. Existenz globaler meromorpher Schnittflächen	209
1. Die Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F}(D) \rightarrow \mathcal{F}(D') \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0$	209
2. Charakteristikensatz und Existenztheorem	210
3. Verschwindungssatz	211
4. Gradgleichung	212
 § 3. Der Satz von Riemann-Roch (vorläufige Fassung)	212
1. Geschlecht. Satz von Riemann-Roch	212
2. Anwendungen	213
 § 4. Struktur lokal-freier Garben	214
1. Lokal-freie Untergarben	214
2. Existenz lokal-freier Untergarben	215
3. Kanonische Divisoren	216
 Supplement zu § 4. Satz von Riemann-Roch für lokal-freie Garben	217
1. Chernfunktion	217
2. Eigenschaften der Chernfunktion	217
3. Satz von Riemann-Roch	218
 § 5. Die Gleichung $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$	218
1. Der $\mathbb{C}$ -Homomorphismus $\mathcal{O}(np)(X) \rightarrow \text{Hom}(H^1(X, \mathcal{O}(D)), H^1(X, \mathcal{O}(D+np)))$	219
2. Die Gleichungen $H^1(X, \mathcal{O}(D+np)) = 0$	220
3. Die Gleichung $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$	220
 § 6. Der Dualitätssatz von Serre	221
1. Hauptteilverteilungen bzgl. eines Divisors	221
2. Die Gleichung $H^1(X, \mathcal{O}) = I(D)$	221
3. Linearformen	222
4. Die Ungleichung $\dim_{\mathcal{M}(X)} J \leq 1$	223
5. Residuenkalkül	224
6. Dualitätssatz	225
 § 7. Der Satz von Riemann-Roch (endgültige Fassung)	227
1. Die Gleichung $i(D) = l(K - D)$	227
2. Formel von Riemann-Roch	228
3. Theorem B für Garben $\mathcal{O}(D)$	229
4. Theorem A für Garben $\mathcal{O}(D)$	229
5. Existenz meromorpher Differentialformen	230
6. Lückensatz	231
7. Theoreme A und B für beliebige lokal-freie Garben	232
8. Hodge-Zerlegung von $H^1(X, \mathbb{C})$	233
 § 8. Spaltung lokal-freier Garben	234
1. Die Zahl $\mu(\mathcal{F})$	234
2. Maximale Untergarben	235
3. Die Ungleichung $\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{F}) + 2g$	236
4. Spaltungskriterium	237
5. Satz von Grothendieck	238

6. Existenz der Spaltung . . . . .	238
7. Eindeutigkeit der Spaltung . . . . .	239
<b>Literatur . . . . .</b>	<b>241</b>
<b>Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>243</b>
<b>Symbolverzeichnis . . . . .</b>	<b>248</b>