

Hansjörg Dirschmid
Wolfgang Kummer
Manfred Schweda

Einführung in die mathematischen Methoden der Theoretischen Physik

mit 37 Abbildungen

Vieweg

Inhaltsverzeichnis

1. Mathematische Grundlagen	1
1.1. Der Begriff des Feldes und des Gradienten	1
1.1.1. Definition der Feldgröße	1
1.1.2. Änderung (Differentiation) der Feldgrößen	4
1.2. Integration der Feldgrößen	8
1.2.1. Kurvenintegrale	8
1.2.2. Flächenintegrale	11
1.3. Tensoren	17
1.3.1. Der Begriff des Tensorfeldes	17
1.3.2. Rechenregeln für Tensoren in kartesischen Koordinatensystemen	19
1.3.3. Der δ -Tensor und ϵ -Tensor	20
1.4. Koordinatentransformationen	21
1.5. Einfachste Differentialoperatoren	25
1.5.1. Die Divergenz und der Satz von Gauß	25
1.5.2. Die Rotation und der Satz von Stokes	28
1.5.3. Sprungflächenoperatoren	30
1.5.4. Divergenz und Rotor in krummlinigen Koordinaten	31
1.6. Übungsbeispiele zu Kap. 1	32
2. Partielle Differentialgleichungen der Physik	35
2.1. Die Poissonsche Differentialgleichung	35
2.1.1. Beschreibung eines Feldes durch Quellen und Wirbel	35
2.1.2. Eindeutigkeit der Lösung. Randbedingungen	36
2.2. Die partielle Differentialgleichung von Schwingungsvorgängen	37
2.2.1. Die schwingende Saite	37
2.2.2. Die schwingende Membran und räumliche Schwingungen	40
2.3. Die Differentialgleichungen der Diffusion und Wärmeleitung	42
2.4. Einfachste Differentialgleichungen der Quantenmechanik	44
2.5. Übungsbeispiele zu Kap. 2	45
3. Lösungsansätze für partielle Differentialgleichungen	46
3.1. Trennung der Variablen	46
3.2. Die Laplacegleichung	48
3.2.1. Die Laplacegleichung für ein Rechteck	48
3.2.2. Die Laplacegleichung in Polarkoordinaten	49
3.3. Die schwingende Saite	51
3.3.1. Die beidseitig eingespannte schwingende Saite	51
3.3.2. Die d'Alembertsche Lösung der schwingenden Saite	52
3.4. Übungsbeispiele zu Kap. 3	55
4. Rand und Eigenwertaufgaben	56
4.1. Problemstellung	56
4.2. Sturm-Liouville-Differentialoperatoren	57

4.2.1. Selbstdadjungierte Differentialoperatoren	57
4.2.2. Sturm-Liouville-Randwertaufgaben	59
4.2.3. Sturm-Liouville-Eigenwertaufgaben	60
4.2.4. Die Sturm-Liouville-Transformation	61
4.3. Der Entwicklungssatz	64
4.3.1. Eigenwerte und Eigenfunktionen	64
4.3.2. Der Entwicklungssatz für beschränkte Intervalle	71
4.4. Die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe	78
4.5. Die inhomogene Randwertaufgabe	82
4.6. Nadelartige Funktionen	87
4.7. Ergänzungen und Bemerkungen	90
4.8. Übungsbeispiele zu Kap. 4	99
5. Singuläre Differentialgleichungen	103
5.1. Der Begriff der singulären Differentialgleichung. Differentialgleichungen der Fuchschen Klasse	103
5.2. Die hypergeometrische Differentialgleichung	109
5.3. Die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung	116
5.4. Übungsbeispiele zu Kap. 5	117
6. Spezielle Funktionen	120
6.1. Kugelfunktionen	120
6.1.1. Die Laplacegleichung in Kugelkoordinaten	120
6.1.2. Die Legendreschen Polynome und ihre erzeugende Funktion	123
6.1.3. Die Formel vom Rodrigues	126
6.1.4. Die Integraldarstellung von Laplace	127
6.1.5. Die zugeordneten Legendreschen Funktionen	128
6.1.6. Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen	130
6.1.7. Das Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen	132
6.1.8. Der Entwicklungssatz nach Kugelflächenfunktionen	133
6.1.9. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie	137
6.2. Zylinderfunktionen	140
6.2.1. Die Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten	140
6.2.2. Besselfunktionen	141
6.2.3. Besselfunktionen als Eigenfunktionen	143
6.2.4. Integraldarstellung und erzeugende Funktion der Besselfunktion $J_n(\rho)$	145
6.2.5. Das Additionstheorem der Besselfunktionen mit ganzzahligem Zeiger	148
6.2.6. Die Wellengleichung. Sphärische Besselfunktionen	149
6.2.7. Entwicklung einer ebenen Welle nach Kugelwellen	150
6.2.8. Asymptotische Darstellungen für sphärische Besselfunktionen	152
6.3. Hermitesche und Laguerresche Polynome	153
6.3.1. Der harmonische Oszillatator (Hermitesche Polynome)	153
6.3.2. Die erzeugende Funktion der Hermiteschen Polynome	155
6.3.3. Die Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom (Laguerresche Polynome)	157
6.4. Übungsbeispiele zu Kap. 6	159

7. Verallgemeinerte Funktionen	164
7.1. Problemstellung	164
7.2. Testfunktionen	166
7.3. Verallgemeinerte Funktionen	168
7.4. Die Diracsche Deltafunktion	170
7.5. Die Derivierte einer verallgemeinerten Funktion	170
7.6. Produkte von verallgemeinerten Funktionen. Das Funktional $\delta(g(x))$	173
7.7. Die uneigentliche Funktion $\Delta(1/r)$	175
7.8. Ergänzungen und Bemerkungen	176
7.9. Übungsbeispiele zu Kap. 7	179
8. Die Methode der Greenschen Funktionen für partielle Differentialgleichungen	181
8.1. Die klassische Lösung der Poissons-Gleichung	181
8.2. Greensche Funktionen und die Deltafunktion	183
8.3. Die Greensche Funktion der Poissons-Gleichung	185
8.3.1. Der eindimensionale Fall	185
8.3.2. Der dreidimensionale Fall mit natürlichen Randbedingungen	188
8.4. Die Greensche Funktion der Wärmeleitung (Diffusion)	188
8.4.1. Die Wärmeleitung im unendlich langen Stab	188
8.4.2. Anfangs- und Randbedingungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung	190
8.4.3. Die Wärmeleitung im Raum	191
8.5. Die Greenschen Funktionen der Wellengleichung und ihrer Verallgemeinerungen	192
8.5.1. Allgemeine Randbedingungen	192
8.5.2. Greensche Funktionen im unendlichen Raum	195
8.6. Übungsbeispiele zu Kap. 8	200
Anhang	202
A. Funktionentheorie	202
B. Die Gammafunktion	208
Literatur	210
Sachwortverzeichnis	211