

Inhalt

I Lineare Algebra

1	Logik und Beweistechnik	13
1.1	Negation	13
1.2	Konjunktion	13
1.3	Disjunktion	14
1.4	Implikation	15
1.5	Äquivalenz	16
1.6	Tautologie	16
1.7	Tautologische Implikation	17
1.8	Beispiele tautologischer Implikationen und Äquivalenzen	17
1.9	Konsistenz von Prämissen	18
1.10	Der indirekte Beweis	18
1.11	Beweis durch Kontraposition	19
1.12	Quantoren, Beweis durch Gegenbeispiel	20
1.13	Vollständige Induktion	21
2	Mengen und Mengenoperationen	23
2.1	Definition einer Menge	23
2.2	Teilmengen und Gleichheit von Mengen	23
2.3	Vereinigung und Durchschnitt von Mengen	24
2.4	Die leere Menge und die Komplementärmenge	28
2.5	Zahlenmengen	30
2.6	Abbildungen von Mengen	30
2.7	Ergänzungen und Aufgaben	31
3	Reelle und komplexe Zahlen	33
3.1	Algebraische Struktur der reellen Zahlen	33
3.2	Ordnungsstruktur und das Rechnen mit Ungleichungen	34
3.3	Absolutbetrag einer reellen Zahl	35
3.4	Komplexe Zahlen	35
3.5	Polynome und ihre Nullstellen	38
4	Vektorraum, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	41
4.1	Vektoren und Vektorraum	41
4.2	Lineare Abhängigkeit und Basis	47
4.3	Inneres Produkt zweier Vektoren	51

4.4	Lineare Gleichungen im Vektorraum	53
4.4.1	Lineare homogene Gleichungen (LHG)	54
4.4.2	Lineare inhomogene Gleichungen (LIG)	56
4.5	Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme	57
4.6	Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen	58
4.7	Berechnung der Basis des Lösungsraumes für ein homogenes Gleichungssystem	61
4.8	Lösungsmethode für den inhomogenen Fall	65
4.9	Ergänzungen und Aufgaben	68
5	Matrizen und lineare Transformationen	69
5.1	Definition und Rang einer Matrix	69
5.2	Lineare Transformationen und ihre Darstellung durch Matrizen, Rechnen mit Matrizen	70
5.3	Beispiele und Ergänzungen	75
5.4	Die Einheitsmatrix	76
5.5	Die Inverse einer Matrix	77
5.6	Transponierte Matrix, Spur von Matrizen	80
5.7	Spezielle Matrizen	81
5.8	Ergänzungen und Aufgaben	83
6	Determinanten	85
6.1	Definition der Determinante	85
6.2	Eigenschaften der Determinante	85
6.3	Berechnung von Determinanten (Entwicklungssatz)	88
6.4	Multiplikationssatz für Determinanten	90
6.5	Ergänzungen und Aufgaben	90
7	Eigenwerte und Quadratische Formen	92
7.1	Einführung in das Problem der Eigenwerte	92
7.2	Die Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms	93
7.3	Die Eigenwerte und Eigenvektoren reeller symmetrischer Matrizen	94
7.4	Ähnliche Matrizen	95
7.5	Quadratische Formen	98
7.6	Idempotente symmetrische Matrizen	100
7.7	Ergänzungen und Aufgaben	103

II Analysis

8	Topologische Struktur, Vollständigkeit der reellen Zahlen, Folgen	107
8.1	Vorbemerkungen	107
8.2	Vollständigkeit der reellen Zahlen	108
8.3	Der Euklidische Raum	109
8.4	Offene und abgeschlossene Mengen, konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$	110
8.5	Beispiele und Übungen	114
8.6	Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$	114
8.7	Teilfolgen	118
9	Reelle Funktionen und Stetigkeit	120
9.1	Abbildungen und reelle Funktionen	120
9.2	Reelles Vielfaches, Summe, Differenz, Produkt, Quotient von Funktionen	121
9.3	Verkettete Funktionen, besondere Typen von Funktionen	122
9.4	Stetigkeit reeller Funktionen	124
9.5	Zweite Stetigkeitsdefinition	125
9.6	Grenzwerte reeller Funktionen	126
9.7	Eigenschaften stetiger Funktionen	128
9.8	Rationale Operationen mit stetigen Funktionen	129
10	Differenzierbare Funktionen	131
10.1	Vorbetrachtung	131
10.2	Partielle Ableitung	136
10.3	Das Differential einer Funktion	139
10.4	Kettenregel	141
10.5	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	143
11	Anwendung der Differentialrechnung	145
11.1	Implizite Funktionen	145
11.2	Extrema reeller Funktionen	149
11.2.1	Extrema ohne Nebenbedingungen	149
11.2.2	Extrema mit Nebenbedingungen	155
12	Integrierbare Funktionen	160
12.1	Der Differentialoperator D	160
12.2	Stammfunktion, Integralfunktion, bestimmtes Integral	161
12.3	Interpretation des bestimmten Integrals als Flächenmaß. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	163
12.4	Das Rechnen mit bestimmten Integralen, Mittelwertsatz der Integralrechnung	165
12.5	Integrationsregeln	167
12.6	Mehrfache Integration	170
12.7	Stammfunktion eines Systems von partiellen Ableitungen	173

13	Differential- und Differenzengleichungen	174
13.1	Der Δ -Operator	174
13.2	Beispiele und Definition von Differenzen und Differentialgleichungen	175
13.3	Lineare Gleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten	179
13.4	Lineare Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	182
13.5	Lineare Gleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	186
13.6	Beispiele von Systemen von Gleichungen	187

Anhang

A.1	Die einfache Summe	190
A.2	Die Doppelsumme und mehrfache Summe	191
A.3	Das Produktzeichen	192
A.4	Fakultät, Binomialquotient und Binomischer Satz	193
A.5	Permutationen und Kombinationen	194
A.5.1	Permutationen von n verschiedenen Elementen	194
A.5.2	Transpositionen und Inversionen	195
A.5.3	Permutationen von n nicht alle voneinander verschiedenen Elementen	195
A.5.4	Kombinationen	196
A.5.5	Kombinationen ohne Wiederholung, mit Berücksichtigung der Anordnung	196
A.5.6	Kombinationen mit Wiederholung, mit Berücksichtigung der Anordnung	197
A.5.7	Kombinationen ohne Wiederholung, ohne Berücksichtigung der Anordnung	197
A.5.8	Kombinationen mit Wiederholung, ohne Berücksichtigung der Anordnung	197
A.6	Unendliche Reihen	198
A.7	Taylorreihen	204
A.7.1	Vorbemerkung	204
A.7.2	Der Satz von Taylor	204
A.7.3	Taylorreihe und Restglied	206
A.7.4	Eigenschaften der Taylorreihe $T_f(x)$	207
A.7.5	Bedingungen für $T_f(x) = f(x)$	208
A.7.6	Beispiele und Aufgaben zur Taylorentwicklung	209
A.7.7	Taylorentwicklung reeller Funktionen mit n Variablen	210
	Register	213