

Otto Rang

# Vektoralgebra

Mit 94 Abbildungen und 66 Übungsaufgaben mit Lösungen

Dr. Dietrich Steinkopff Verlag . Darmstadt

## Inhaltsverzeichnis

<i>Vorwort</i> . . . . .	V
<b>§ 1. Die Vektordefinition und einfache Gesetzmäßigkeiten</b>	
<i>1.1 Skalare und Vektoren</i> . . . . .	1
Skalare . . . . .	1
Vektoren . . . . .	1
Der Betrag eines Vektors . . . . .	4
<i>1.2 Die Summe und die Differenz von Vektoren</i> . . . . .	4
Eigenschaften der Vektorsumme . . . . .	4
Das Kraftpolygon . . . . .	5
Die Vektordifferenz . . . . .	5
<i>1.3 Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar</i> . . . . .	6
Zur Definition . . . . .	6
Beispiele aus der Physik . . . . .	7
Das distributive Gesetz . . . . .	8
<i>1.4 Einsvektoren</i> . . . . .	8
<i>1.5 Die lineare Abhängigkeit von Vektoren</i> . . . . .	9
Die Kollinearität . . . . .	9
Die Komplanarität . . . . .	9
Vektoren im dreidimensionalen Raum . . . . .	10
Der Beweis durch Vektorrechnung, daß sich die Diagonalen in einem Parallelogramm gegenseitig halbieren . . . . .	11
Das Raumgitter . . . . .	11
<i>1.6 Die Zerlegung eines Vektors in Komponenten</i> . . . . .	13
Definition der Vektorzerlegung . . . . .	13
Beispiele aus der Physik . . . . .	14
Zerlegung in orthogonale Komponenten . . . . .	14
<i>1.7 Das kartesische Koordinatensystem</i> . . . . .	15
Die Kennzeichnung des kartesischen Systems durch seine Koordinatenvektoren . . . . .	15
Ortsvektoren . . . . .	16
Vektorgleichungen in kartesischen Koordinaten . . . . .	17
Die Formulierung physikalischer Gesetzmäßigkeiten in kartesischen Koordinaten . . . . .	17
<i>1.8 Übungsaufgaben Nr. 1 bis Nr. 14</i> . . . . .	17

## § 2. Produkte zweier Vektoren

<b>2.1 Das skalare Produkt</b>	20
Definitionsmöglichkeiten von Produkten von Vektoren	20
Ein Beispiel aus der Physik	20
Die Definition des skalaren Produktes	20
Eigenschaften des skalaren Produktes	21
Eigenschaften, die das skalare Produkt nicht hat	22
Sonderfälle von skalaren Produkten	23
Zwei Beispiele zu den Sonderfällen des skalaren Produktes	23
Die skalaren Produkte der Koordinatenvektoren	24
Die skalare Multiplikation eines Vektors mit einem Einsvektor	24
<b>2.2 Geometrische und physikalische Anwendungsbeispiele zum skalaren Produkt</b>	24
Der Kosinussatz der ebenen Trigonometrie	24
Satz: Die Summe der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate über den vier Seiten	25
Die Gleichung einer Ebene	25
Laues Interferenzbedingung	26
Die Millerschen Indizes	27
Die Phase einer ebenen Welle	28
<b>2.3 Die Komponentendarstellung des skalaren Produktes</b>	28
<b>2.4 Die Transformation kartesischer Komponenten</b>	29
Die Verschiebung des Koordinatensystems	29
Die Drehung des Koordinatensystems	30
Ein Beispiel: Drehung des Koordinatensystems um die $z$ -Achse	31
<b>2.5 Übungsaufgaben zum skalaren Produkt Nr. 15 bis Nr. 34</b>	32
<b>2.6 Das dyadische Produkt</b>	34
Zur Definition	34
Eigenschaften des dyadischen Produktes	35
<b>2.7 Die Komponentendarstellung des dyadischen Produktes</b>	36
<b>2.8 Das Vektorprodukt</b>	37
Ein Beispiel aus der Geometrie	37
Die Definition des Vektorproduktes	37
Eigenschaften des Vektorproduktes	38
Eigenschaften, die das Vektorprodukt nicht hat	41
Sonderfälle von Vektorprodukten	42
Zwei Beispiele zu den Sonderfällen des Vektorproduktes	42
Die Vektorprodukte der Koordinatenvektoren	44
Die vektorielle Multiplikation eines Vektors mit einem Einsvektor	44
<b>2.9 Geometrische und physikalische Anwendungsbeispiele zum Vektorprodukt</b>	44
Der Sinussatz der ebenen Trigonometrie	44
Der Abstand zweier Geraden	45
Der infinitesimale Winkel	45
Die magnetische Kraft auf eine bewegte elektrische Punktladung	47
Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter	47
Das Drehmoment einer Kraft	48
Das Drehmoment eines Kräftepaars	49

<b>2.10 Die Komponentendarstellung des Vektorproduktes . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>2.11 Übungsaufgaben zum Vektorprodukt und zum dyadischen Produkt</b>	
Nr. 35 bis Nr. 43 . . . . .	51

### **§ 3. Die Differentiation von Vektoren nach Skalaren**

<b>3.1 Die Definition des Differentialquotienten eines Vektors nach einem Skalar . . . . .</b>	<b>52</b>
Der Differentialquotient als Grenzwert . . . . .	52
Ein Beispiel: Der Geschwindigkeitsvektor . . . . .	52
Die Differentiation einer Vektorsumme . . . . .	53
Die Differentiation eines Produktes aus Vektor und Skalar . . . . .	53
Ein Beispiel: Differentiation eines Vektors, der als Produkt aus Betrag und Einheitsvektor dargestellt ist . . . . .	54
Die Differentiation eines Vektors in kartesischen Koordinaten . . . . .	55
Ein Beispiel: die Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten . . . . .	55
Ein Beispiel für mehrfache Differentiation: der Beschleunigungsvektor . . . . .	56
<b>3.2 Die Differentiation von Produkten von Vektoren . . . . .</b>	<b>58</b>
Die Differentiation des skalaren Produktes . . . . .	58
Die Differentiation des Vektorproduktes . . . . .	59
<b>3.3 Anwendungsbeispiele aus der Geometrie . . . . .</b>	<b>59</b>
Die Frenetschen Formeln . . . . .	59
<b>3.4 Anwendungsbeispiele aus der Physik . . . . .</b>	<b>62</b>
Die Rotationsgeschwindigkeit eines starren Körpers . . . . .	62
Die Bewegung einer elektrischen Ladung in einem homogenen Magnetfeld . . . . .	63
Der Flächensatz (zweites Keplersches Gesetz) . . . . .	65
Das beschleunigte, jedoch nicht rotierende Bezugssystem . . . . .	66
Das rotierende Bezugssystem . . . . .	67
Die Bewegungsgleichung eines Systems von Massenpunkten . . . . .	71
Das Drehmoment auf ein System von Massenpunkten . . . . .	72
Dralländerung und Drehmoment auf ein System von Massenpunkten . . . . .	73
<b>3.5 Übungsaufgaben Nr. 44 bis Nr. 55 . . . . .</b>	<b>73</b>

### **§ 4. Mehrfache Produkte von Vektoren**

<b>4.1 Das Spatprodukt . . . . .</b>	<b>75</b>
Definition . . . . .	75
Eigenschaften des Spatproduktes . . . . .	75
Das Spatprodukt in kartesischen Koordinaten . . . . .	77
<b>4.2 Der Entwicklungssatz . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>4.3 Das gemischte Dreifachprodukt . . . . .</b>	<b>80</b>
<b>4.4 Die Überschiebung zweier dyadischer Produkte . . . . .</b>	<b>80</b>
<b>4.5 Anwendungsbeispiele aus der Geometrie . . . . .</b>	<b>81</b>
Der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie . . . . .	81
Die Kosinussätze der sphärischen Trigonometrie . . . . .	82
Zu den Frenetschen Formeln . . . . .	83

<i>4.6 Anwendungsbeispiele aus der Physik</i> . . . . .	84
Das Drehmoment . . . . .	84
Die Energie eines Dipols im elektrischen Feld . . . . .	85
Die induzierte Spannung in einem geradlinigen, bewegten Leiter . . . . .	86
Die Driftgeschwindigkeit geladener Partikel in Gasentladungen. . . . .	86
Das reziproke Gitter . . . . .	88
Die Bedeutung des reziproken Gitters. . . . .	90
Anwendung des reziproken Gitters, die Ewaldsche Ausbreitungskugel . . . . .	92
Die Braggsche Interferenzbedingung . . . . .	93
<i>4.7 Übungsaufgaben</i> Nr. 56 bis Nr. 66 . . . . .	94
<i>Lösungen der Übungsaufgaben 1–66</i> . . . . .	95
<i>Sachverzeichnis</i> . . . . .	105