

Otto Rang

Vektoralgebra

Mit 94 Abbildungen und 66 Übungsaufgaben mit Lösungen

Dr. Dietrich Steinkopff Verlag · Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

<i>Vorwort</i>	V
§ 1. Die Vektordefinition und einfachere Gesetzmäßigkeiten	
1.1 <i>Skalare und Vektoren</i>	1
Skalare	1
Vektoren	1
Der Betrag eines Vektors	4
1.2 <i>Die Summe und die Differenz von Vektoren</i>	4
Eigenschaften der Vektorsumme	4
Das Kraftpolygon	5
Die Vektordifferenz	5
1.3 <i>Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar</i>	6
Zur Definition	6
Beispiele aus der Physik	7
Das distributive Gesetz	8
1.4 <i>Einsvektoren</i>	8
1.5 <i>Die lineare Abhängigkeit von Vektoren</i>	9
Die Kollinearität	9
Die Komplanarität	9
Vektoren im dreidimensionalen Raum	10
Der Beweis durch Vektorrechnung, daß sich die Diagonalen in einem Parallelogramm gegenseitig halbieren	11
Das Raumgitter	11
1.6 <i>Die Zerlegung eines Vektors in Komponenten</i>	13
Definition der Vektorzerlegung	13
Beispiele aus der Physik	14
Zerlegung in orthogonale Komponenten	14
1.7 <i>Das kartesische Koordinatensystem</i>	15
Die Kennzeichnung des kartesischen Systems durch seine Koordinatenvektoren	15
Ortsvektoren	16
Vektorgleichungen in kartesischen Koordinaten	17
Die Formulierung physikalischer Gesetzmäßigkeiten in kartesischen Koordinaten	17
1.8 <i>Übungsaufgaben Nr. 1 bis Nr. 14</i>	17

§ 2. Produkte zweier Vektoren

2.1	<i>Das skalare Produkt</i>	20
	Definitionsmöglichkeiten von Produkten von Vektoren	20
	Ein Beispiel aus der Physik	20
	Die Definition des skalaren Produktes	20
	Eigenschaften des skalaren Produktes	21
	Eigenschaften, die das skalare Produkt nicht hat	22
	Sonderfälle von skalaren Produkten	23
	Zwei Beispiele zu den Sonderfällen des skalaren Produktes	23
	Die skalaren Produkte der Koordinatenvektoren	24
	Die skalare Multiplikation eines Vektors mit einem Einsektor	24
2.2	<i>Geometrische und physikalische Anwendungsbeispiele zum skalaren Produkt</i>	24
	Der Kosinussatz der ebenen Trigonometrie	24
	Satz: Die Summe der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate über den vier Seiten	25
	Die Gleichung einer Ebene	25
	Laues Interferenzbedingung	26
	Die Millerschen Indizes	27
	Die Phase einer ebenen Welle	28
2.3	<i>Die Komponentendarstellung des skalaren Produktes</i>	28
2.4	<i>Die Transformation kartesischer Komponenten</i>	29
	Die Verschiebung des Koordinatensystems	29
	Die Drehung des Koordinatensystems	30
	Ein Beispiel: Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse	31
2.5	<i>Übungsaufgaben zum skalaren Produkt Nr. 15 bis Nr. 34</i>	32
2.6	<i>Das dyadische Produkt</i>	34
	Zur Definition	34
	Eigenschaften des dyadischen Produktes	35
2.7	<i>Die Komponentendarstellung des dyadischen Produktes</i>	36
2.8	<i>Das Vektorprodukt</i>	37
	Ein Beispiel aus der Geometrie	37
	Die Definition des Vektorproduktes	37
	Eigenschaften des Vektorproduktes	38
	Eigenschaften, die das Vektorprodukt nicht hat	41
	Sonderfälle von Vektorprodukten	42
	Zwei Beispiele zu den Sonderfällen des Vektorproduktes	42
	Die Vektorprodukte der Koordinatenvektoren	44
	Die vektorielle Multiplikation eines Vektors mit einem Einsektor	44
2.9	<i>Geometrische und physikalische Anwendungsbeispiele zum Vektorprodukt</i>	44
	Der Sinussatz der ebenen Trigonometrie	44
	Der Abstand zweier Geraden	45
	Der infinitesimale Winkel	45
	Die magnetische Kraft auf eine bewegte elektrische Punktladung	47
	Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter	47
	Das Drehmoment einer Kraft	48
	Das Drehmoment eines Kräftepaars	49

2.10 Die Komponentendarstellung des Vektorproduktes	49
2.11 Übungsaufgaben zum Vektorprodukt und zum dyadischen Produkt Nr. 35 bis Nr. 43	51
 § 3. Die Differentiation von Vektoren nach Skalaren	
3.1 Die Definition des Differentialquotienten eines Vektors nach einem Skalar	52
Der Differentialquotient als Grenzwert	52
Ein Beispiel: Der Geschwindigkeitsvektor	52
Die Differentiation einer Vektorsumme	53
Die Differentiation eines Produktes aus Vektor und Skalar	53
Ein Beispiel: Differentiation eines Vektors, der als Produkt aus Betrag und Einsektor dargestellt ist	54
Die Differentiation eines Vektors in kartesischen Koordinaten	55
Ein Beispiel: die Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten	55
Ein Beispiel für mehrfache Differentiation: der Beschleunigungsvektor	56
3.2 Die Differentiation von Produkten von Vektoren	58
Die Differentiation des skalaren Produktes	58
Die Differentiation des Vektorproduktes	59
3.3 Anwendungsbeispiele aus der Geometrie	59
Die Frenetschen Formeln	59
3.4 Anwendungsbeispiele aus der Physik	62
Die Rotationsgeschwindigkeit eines starren Körpers	62
Die Bewegung einer elektrischen Ladung in einem homogenen Magnetfeld	63
Der Flächensatz (zweites Keplersches Gesetz)	65
Das beschleunigte, jedoch nicht rotierende Bezugssystem	66
Das rotierende Bezugssystem	67
Die Bewegungsgleichung eines Systems von Massenpunkten	71
Das Drehmoment auf ein System von Massenpunkten	72
Dralländerung und Drehmoment auf ein System von Massenpunkten	73
3.5 Übungsaufgaben Nr. 44 bis Nr. 55	73
 § 4. Mehrfache Produkte von Vektoren	
4.1 Das Spatprodukt	75
Definition	75
Eigenschaften des Spatproduktes	75
Das Spatprodukt in kartesischen Koordinaten	77
4.2 Der Entwicklungssatz	77
4.3 Das gemischte Dreifachprodukt	80
4.4 Die Überschiebung zweier dyadischer Produkte	80
4.5 Anwendungsbeispiele aus der Geometrie	81
Der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie	81
Die Kosinussätze der sphärischen Trigonometrie	82
Zu den Frenetschen Formeln	83

4.6	<i>Anwendungsbeispiele aus der Physik</i>	84
	Das Drehmoment	84
	Die Energie eines Dipols im elektrischen Feld	85
	Die induzierte Spannung in einem geradlinigen, bewegten Leiter	86
	Die Driftgeschwindigkeit geladener Partikel in Gasentladungen	86
	Das reziproke Gitter	88
	Die Bedeutung des reziproken Gitters	90
	Anwendung des reziproken Gitters, die Ewaldsche Ausbreitungskugel	92
	Die Braggsche Interferenzbedingung	93
4.7	<i>Übungsaufgaben</i> Nr. 56 bis Nr. 66	94
	<i>Lösungen der Übungsaufgaben 1–66</i>	95
	<i>Sachverzeichnis</i>	105