

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung . . . . .	XIII
----------------------	------

## Kapitel I

### Grundbegriffe

§ 1. Funktionen und Operationen . . . . .	1
1.1. Alphabet, Worte . . . . .	1
1.2. Funktionen, Terme . . . . .	3
1.3. Algebren . . . . .	7
1.4. Kodierung . . . . .	9
Beispiele und Übungen . . . . .	11
§ 2. Grundlegende berechenbare Operatoren . . . . .	12
2.1. Einsetzung partieller Funktionen . . . . .	12
2.2. Operator der primitiven Rekursion . . . . .	14
2.3. Operation der Minimalisierung . . . . .	20
2.4. Allgemein rekursive Funktionen . . . . .	25
Beispiele und Übungen . . . . .	26

## Kapitel II

### Primitiv rekursive Funktionen und rekursiv aufzählbare Mengen

§ 3. Primitiv rekursive Funktionen . . . . .	29
3.1. Die Operationen der Summation und der majorisierten Umkehrung . . . . .	29
3.2. Primitive Rekursivität einiger arithmetischer Funktionen . . . . .	33
3.3. Aufzählung von Paaren und von $n$ -Tupeln von Zahlen . . . . .	39
3.4. Abhängigkeiten zwischen den Operatoren der primitiven Rekursion und der Minimalisierung . . . . .	44
3.5. Einstellige primitiv rekursive Funktionen . . . . .	48
Ergänzungen, Beispiele und Übungen . . . . .	56
§ 4. Rekursiv aufzählbare Mengen . . . . .	57
4.1. Rekursive und primitiv rekursive Mengen . . . . .	57
4.2. Rekursiv aufzählbare Mengen . . . . .	59
4.3. Erzeugte Mengen . . . . .	61
4.4. Mengen von $n$ -Tupeln natürlicher Zahlen . . . . .	64
Beispiele und Übungen . . . . .	69

## Kapitel III

## Allgemein rekursive und partiell rekursive Funktionen

§ 5. Allgemein rekursive Funktionen . . . . .	70
5.1. Rekursionen der zweiten Stufe . . . . .	70
5.2. Universelle allgemein rekursive Funktionen . . . . .	75
5.3. Stark wachsende Funktionen . . . . .	81
5.4. Umkehrung von Funktionen. ROBINSONS Algebra . . . . .	85
Ergänzungen, Beispiele und Übungen . . . . .	89
§ 6. Partiiell rekursive Funktionen . . . . .	90
6.1. Parametrisierung partiell rekursiver Funktionen . . . . .	91
6.2. Universelle partiell rekursive Funktionen . . . . .	96
6.3. Vervollständigung von Funktionen. Konstruktion einer nicht-rekursiven, rekursiv aufzählbaren Menge . . . . .	98
6.4. Untersuchung der KLEENESchen Darstellung . . . . .	102
Ergänzungen, Beispiele und Übungen . . . . .	104

## Kapitel IV

## Aufgezählte Gesamtheiten

§ 7. Aufzählungen von Gesamtheiten von Mengen und Funktionen . . . . .	108
7.1. KLEENES universelle Funktionen . . . . .	108
7.2. KLEENESche Aufzählung . . . . .	111
7.3. POSTSche Aufzählung . . . . .	113
7.4. Eindeutige Aufzählungen . . . . .	119
Ergänzungen, Beispiele und Übungen . . . . .	127
§ 8. Reduzierbarkeit und Kreativität von Mengen . . . . .	128
8.1. Reduzierbarkeit und $m$ -Äquivalenz von Mengen . . . . .	128
8.2. Produktive und kreative Mengen . . . . .	130
8.3. Einfache Mengen . . . . .	134
8.4. Maximale Mengen . . . . .	135
Ergänzungen, Beispiele und Übungen . . . . .	140
§ 9. Aufzählungen beliebiger Gesamtheiten . . . . .	144
9.1. Isomorphie und Äquivalenz von Aufzählungen . . . . .	144
9.2. 1-1-Reduzierbarkeit von Aufzählungen . . . . .	148
9.3. Totale Aufzählungen . . . . .	154
9.4. Familien von Objekten aus aufgezählten Gesamtheiten . . . . .	159
Ergänzungen, Beispiele und Übungen . . . . .	161
§ 10. Universelle und kreative Systeme von Mengen . . . . .	162
10.1. $m$ -Universalität von Mengensystemen . . . . .	163
10.2. Kreative Systeme von Mengen . . . . .	166
10.3. Rekursiv untrennbare Mengen . . . . .	169
Ergänzungen, Beispiele und Übungen . . . . .	172

## Kapitel V

### Algorithmen und Turing-Maschinen

§ 11. Wortmengen und Wortfunktionen . . . . .	174
11.1. Wortmengen . . . . .	175
11. 2. Grundlegende Wortoperatoren . . . . .	178
11. 3. Direkte Definition der Klasse der partiell rekursiven Wortfunktionen . . . . .	185
Ergänzungen und Beispiele . . . . .	187
§ 12. TURING-Maschinen . . . . .	188
12.1. TURING-POST-Maschinen . . . . .	188
12.2. Berechenbare Funktionen . . . . .	194
12.3. Synthese von TURING-Maschinen . . . . .	199
12.4. Theoreme über den Graph und über die Existenz von universellen partiell rekursiven Funktionen . . . . .	211
12.5. Universelle Maschinen . . . . .	218
Ergänzungen, Beispiele und Übungen . . . . .	220
§ 13. Anwendungen . . . . .	222
13.1. Das Wortproblem für Halbgruppen . . . . .	222
13.2. Allgemeingültige Ausdrücke des Prädikatenkalküls der ersten Stufe . . . . .	230
13.3. Arithmetische Mengen . . . . .	236
13.4. Ausdrücke der zweiten Stufe . . . . .	241
Ergänzungen und Beispiele . . . . .	242

## Kapitel VI

### Varianten der Maschinen und Algorithmen von Turing und Post

§ 14. Normale Algorithmen und Operator-Algorithmen . . . . .	247
14.1. Formale Systeme. POST-Produktionen . . . . .	247
14.2. Normale Algorithmen . . . . .	252
14.3. Operator-Algorithmen . . . . .	254
Ergänzungen und Beispiele . . . . .	263
§ 15. Mehrbandmaschinen und TAG-Systeme . . . . .	263
15.1. Allgemeine Mehrbandmaschinen . . . . .	264
15.2. MINSKY-Maschinen . . . . .	266
15.3. Homogene Produktionen. TAG-Systeme . . . . .	276
Ergänzungen, Beispiele und Übungen . . . . .	281
§ 16. Diophantische Gleichungen . . . . .	284
16.1. Diophantische Prädikate und Funktionen . . . . .	284
16.2. Arithmetische Darstellung . . . . .	290
16.3. Repräsentierbarkeit natürlicher Zahlen durch Polynome . . . . .	295
16.4. Exponentielle Gleichungen . . . . .	298
Beispiele und Übungen . . . . .	305
Anhang	
Die rekursive Unlösbarkeit des zehnten HILBERTschen Problems . . . . .	307
Literatur . . . . .	321
Hauptsächlich verwendete Bezeichnungen . . . . .	327
Namenverzeichnis . . . . .	330
Sachverzeichnis . . . . .	331