

## Inhaltsverzeichnis

<i>Vorworte</i> . . . . .	V
<b>§ 1. Die Vektordefinition und einfache Gesetzmäßigkeiten</b>	
<b>1.1 Skalare und Vektoren</b> . . . . .	1
Skalare . . . . .	1
Vektoren . . . . .	1
Der Betrag eines Vektors . . . . .	4
<b>1.2 Die Summe und die Differenz von Vektoren</b> . . . . .	4
Eigenschaften der Vektorsumme . . . . .	4
Das Kraftpolygon . . . . .	5
Die Vektoraddition . . . . .	5
<b>1.3 Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar</b> . . . . .	6
Zur Definition . . . . .	6
Beispiele aus der Physik . . . . .	7
Das distributive Gesetz . . . . .	8
<b>1.4 Einspektoren</b> . . . . .	8
<b>1.5 Die lineare Abhängigkeit von Vektoren</b> . . . . .	9
Die Kollinearität . . . . .	9
Die Komplanarität . . . . .	9
Vektoren im dreidimensionalen Raum . . . . .	10
Der Beweis durch Vektorrechnung, daß sich die Diagonalen in einem Parallelogramm gegenseitig halbieren . . . . .	11
Das Raumgitter . . . . .	11
<b>1.6 Die Zerlegung eines Vektors in Komponenten</b> . . . . .	13
Definition der Vektorzerlegung . . . . .	13
Beispiele aus der Physik . . . . .	14
Zerlegung in orthogonale Komponenten . . . . .	14
<b>1.7 Das kartesische Koordinatensystem</b> . . . . .	15
Die Kennzeichnung des kartesischen Systems durch seine Koordinatenvektoren . . . . .	15
Ortsvektoren . . . . .	16
Vektorgleichungen in kartesischen Koordinaten . . . . .	17
Die Formulierung physikalischer Gesetzmäßigkeiten in kartesischen Koordinaten . . . . .	17
<b>1.8 Übungsaufgaben Nr. 1 bis Nr. 14</b> . . . . .	17

## § 2. Produkte zweier Vektoren

2.1	<i>Das skalare Produkt</i>	20
	Definitions möglichkeiten von Produkten von Vektoren	20
	Ein Beispiel aus der Physik	20
	Die Definition des skalaren Produktes	20
	Eigenschaften des skalaren Produktes	21
	Eigenschaften, die das skalare Produkt nicht hat	22
	Sonderfälle von skalaren Produkten	23
	Zwei Beispiele zu den Sonderfällen des skalaren Produktes	23
	Die skalaren Produkte der Koordinatenvektoren	24
	Die skalare Multiplikation eines Vektors mit einem Einsvektor	24
2.2	<i>Geometrische und physikalische Anwendungsbeispiele zum skalaren Produkt</i>	24
	Der Kosinussatz der ebenen Trigonometrie	24
	Satz: Die Summe der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate über den vier Seiten	25
	Die Gleichung einer Ebene	25
	Laues Interferenzbedingung	26
	Die Millerschen Indizes	27
	Die Phase einer ebenen Welle	28
2.3	<i>Die Komponentendarstellung des skalaren Produktes</i>	28
2.4	<i>Die Transformation kartesischer Komponenten</i>	29
	Die Verschiebung des Koordinatensystems	29
	Die Drehung des Koordinatensystems	30
	Ein Beispiel: Drehung des Koordinatensystems um die $z$ -Achse	31
2.5	<i>Übungsaufgaben zum skalaren Produkt Nr. 15 bis Nr. 34</i>	32
2.6	<i>Das dyadische Produkt</i>	34
	Zur Definition	34
	Eigenschaften des dyadischen Produktes	35
2.7	<i>Die Komponentendarstellung des dyadischen Produktes</i>	36
2.8	<i>Das Vektorprodukt</i>	37
	Ein Beispiel aus der Geometrie	37
	Die Definition des Vektorproduktes	37
	Eigenschaften des Vektorproduktes	38
	Eigenschaften, die das Vektorprodukt nicht hat	41
	Sonderfälle von Vektorprodukten	42
	Zwei Beispiele zu den Sonderfällen des Vektorproduktes	42
	Die Vektorprodukte der Koordinatenvektoren	44
	Die vektorielle Multiplikation eines Vektors mit einem Einsvektor	44
2.9	<i>Geometrische und physikalische Anwendungsbeispiele zum Vektorprodukt</i>	44
	Der Sinussatz der ebenen Trigonometrie	44
	Der Abstand zweier Geraden	45
	Der infinitesimale Winkel	45
	Die magnetische Kraft auf eine bewegte elektrische Punktladung	47
	Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter	47
	Das Drehmoment einer Kraft	48
	Das Drehmoment eines Kräftepaars	49

2.10 Die Komponentendarstellung des Vektorproduktes . . . . .	49
2.11 Übungsaufgaben zum Vektorprodukt und zum dyadischen Produkt	
Nr. 35 bis Nr. 43 . . . . .	51

### § 3. Die Differentiation von Vektoren nach Skalaren

3.1 Die Definition des Differentialquotienten eines Vektors nach einem Skalar . . . . .	52
Der Differentialquotient als Grenzwert . . . . .	52
Ein Beispiel: Der Geschwindigkeitsvektor . . . . .	52
Die Differentiation einer Vektorsumme . . . . .	53
Die Differentiation eines Produktes aus Vektor und Skalar . . . . .	53
Ein Beispiel: Differentiation eines Vektors, der als Produkt aus Betrag und Einsvektor dargestellt ist . . . . .	54
Die Differentiation eines Vektors in kartesischen Koordinaten . . . . .	55
Ein Beispiel: die Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten . . . . .	55
Ein Beispiel für mehrfache Differentiation: der Beschleunigungsvektor . . . . .	56
3.2 Die Differentiation von Produkten von Vektoren . . . . .	58
Die Differentiation des skalaren Produktes . . . . .	58
Die Differentiation des Vektorproduktes . . . . .	59
3.3 Anwendungsbeispiele aus der Geometrie . . . . .	59
Die Frenetschen Formeln . . . . .	59
3.4 Anwendungsbeispiele aus der Physik . . . . .	62
Die Rotationsgeschwindigkeit eines starren Körpers . . . . .	62
Die Bewegung einer elektrischen Ladung in einem homogenen Magnetfeld . . . . .	63
Der Flächensatz (zweites Keplersches Gesetz) . . . . .	65
Das beschleunigte, jedoch nicht rotierende Bezugssystem . . . . .	66
Das rotierende Bezugssystem . . . . .	67
Die Bewegungsgleichung eines Systems von Massenpunkten . . . . .	71
Das Drehmoment auf ein System von Massenpunkten . . . . .	72
Dralländerung und Drehmoment auf ein System von Massenpunkten . . . . .	73
3.5 Übungsaufgaben Nr. 44 bis Nr. 55 . . . . .	73

### § 4. Mehrfache Produkte von Vektoren

4.1 Das Spatprodukt . . . . .	75
Definition . . . . .	75
Eigenschaften des Spatproduktes . . . . .	75
Das Spatprodukt in kartesischen Koordinaten . . . . .	77
4.2 Der Entwicklungssatz . . . . .	77
4.3 Das gemischte Dreifachprodukt . . . . .	80
4.4 Die Überschiebung zweier dyadischer Produkte . . . . .	80
4.5 Anwendungsbeispiele aus der Geometrie . . . . .	81
Der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie . . . . .	81
Die Kosinussätze der sphärischen Trigonometrie . . . . .	82
Zu den Frenetschen Formeln . . . . .	83

<b>4.6 Anwendungsbeispiele aus der Physik</b> . . . . .	84
Das Drehmoment . . . . .	84
Die Energie eines Dipols im elektrischen Feld . . . . .	85
Die induzierte Spannung in einem geradlinigen, bewegten Leiter . . . . .	86
Die Driftgeschwindigkeit geladener Partikel in Gasentladungen. . . . .	86
Das reziproke Gitter . . . . .	88
Die Bedeutung des reziproken Gitters. . . . .	90
Anwendung des reziproken Gitters, die Ewaldsche Ausbreitungskugel . . . . .	92
Die Braggsche Interferenzbedingung . . . . .	93
<b>4.7 Übungsaufgaben Nr. 56 bis Nr. 66</b> . . . . .	94

## § 5. Der Gradient

<b>5.1 Das Skalarfeld und der Gradient</b> . . . . .	96
Der Begriff des Gradienten . . . . .	96
Der Gradient in kartesischen Koordinaten . . . . .	97
Die Richtungsableitung einer Ortsfunktion . . . . .	99
Das totale Differential . . . . .	100
Der Gradient einer Summe . . . . .	100
Der Gradient eines Produktes . . . . .	100
Der Gradient der Funktion einer Ortsfunktion . . . . .	101
<b>5.2 Das Gradientenfeld</b> . . . . .	101
Vektorlinien . . . . .	101
Das Linienintegral eines Gradienten . . . . .	101
Das Potentialfeld . . . . .	104
Die Berechnung von Linienintegralen . . . . .	105
<b>5.3 Anwendungsbeispiele</b> . . . . .	106
Die Tangentialfläche an eine gekrümmte Fläche . . . . .	106
Physikalische Anwendungen des Potentialbegriffs . . . . .	107
Das elektrostatische Feld . . . . .	108
Die potentielle Energie eines Moleküls mit elektrischem Dipolmoment . . . . .	109
Elektrizitätsleitung und Wärmeleitung . . . . .	110
Die Diffusion . . . . .	111
<b>5.4 Das Vektorfeld und der Vektorgradient</b> . . . . .	111
Der Begriff des Vektorgradienten . . . . .	111
Die Richtungsableitung in einem Vektorfeld . . . . .	113
Der Vektorgradient in kartesischen Koordinaten . . . . .	113
Der substantielle (oder auch konvektive) zeitliche Differentialquotient in einem strömenden Medium . . . . .	115
Die hydrodynamische Grundgleichung . . . . .	115
Die Reihenentwicklung von Ortsfunktionen . . . . .	116
Die Kraftwirkung eines elektrischen Feldes auf eine Anzahl elektrischer Punktladungen	117
<b>5.5 Übungsaufgaben Nr. 67 bis Nr. 91</b> . . . . .	118

## § 6. Die Divergenz und die Rotation

<b>6.1 Das Quellenfeld und der Begriff der Divergenz</b> . . . . .	122
Vektorlinien . . . . .	122

Der Vektorfluß . . . . .	122
Vektorröhren . . . . .	124
Die Divergenz . . . . .	125
Die Divergenz einer Summe . . . . .	127
Die Divergenz eines Produktes aus ortsabhängigem Vektor und konstantem Skalar . . . . .	127
Die Divergenz in kartesischen Koordinaten . . . . .	127
<b>6.2 Der Gaußsche Integralsatz . . . . .</b>	<b>128</b>
Der Gaußsche Satz . . . . .	128
Die Berechnung von Flächenintegralen in kartesischen Koordinaten . . . . .	129
Die Berechnung von Volumenintegralen in kartesischen Koordinaten . . . . .	132
<b>6.3 Anwendungsbeispiele . . . . .</b>	<b>134</b>
Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	134
Das Strömungsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit . . . . .	135
Das quellenfreie elektrostatische Feld . . . . .	135
Die Herleitung der Grundformel der kinetischen Gastheorie aus dem Virialsatz . . . . .	135
Das elektrostatische Feld einer Punktladung . . . . .	136
Das Feld in der Grenzschicht einer Halbleiter-Diode . . . . .	138
<b>6.4 Das Wirbelfeld und der Begriff der Rotation . . . . .</b>	<b>141</b>
Die Zirkulation und die Zirkulationsdichte . . . . .	141
Die Rotation . . . . .	141
Der Rotor einer Summe . . . . .	143
Der Rotor eines Produktes aus ortsabhängigem Vektor und konstantem Skalar . . . . .	144
Der Rotor in kartesischen Koordinaten . . . . .	144
<b>6.5 Der Stokessche Integralsatz . . . . .</b>	<b>145</b>
Die Gesamtzirkulation aneinandergrenzender Flächen . . . . .	145
Der Stokessche Satz . . . . .	146
<b>6.6 Anwendungsbeispiele . . . . .</b>	<b>147</b>
Der Rotor des Geschwindigkeitsvektors bei der Drehung eines starren Körpers . . . . .	147
Ein Beispiel für ein Strömungsfeld einer laminar strömenden viskosen Flüssigkeit . . . . .	148
Anwendung des Durchflutungsgesetzes zur Feldstärkenberechnung . . . . .	148
Die Maxwellschen Gleichungen . . . . .	149
<b>6.7 Übungsaufgaben Nr. 92 bis Nr. 117 . . . . .</b>	<b>151</b>
<b>§ 7. Erweiterte räumliche Differentiation</b>	
<b>7.1 Der Nabla-Operator . . . . .</b>	<b>153</b>
Die Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes . . . . .	153
Der Operator Nabla . . . . .	154
Der Operator Nabla in kartesischen Koordinaten . . . . .	155
Die Invarianz des $\nabla$ -Operators gegen Drehung des Koordinatensystems . . . . .	156
<b>7.2 Die räumliche Differentiation von Produkten . . . . .</b>	<b>157</b>
Der Einwirkungspfeil . . . . .	157
$\text{grad } (ST)$ . . . . .	157
$\text{div } (SA)$ . . . . .	158
$\text{rot } (SA)$ . . . . .	158
$\text{div } (A \times B)$ . . . . .	158
$\text{div } (AB)$ . . . . .	158

rot ( $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ) . . . . .	159
grad ( $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ) . . . . .	159
<b>7.3 Die Kettenregel bei räumlicher Differentiation . . . . .</b>	<b>160</b>
<b>7.4 Mehrfache räumliche Differentiation . . . . .</b>	<b>162</b>
Die Rotation eines Gradienten . . . . .	162
Die Divergenz einer Rotation . . . . .	162
Der Laplace-Operator . . . . .	163
Anwendung des Laplace-Operators auf Vektoren . . . . .	164
Anwendung des Laplace-Operators auf Produkte . . . . .	166
Die Greenschen Integralsätze . . . . .	167
<b>7.5 Anwendungsbeispiele . . . . .</b>	<b>168</b>
Die Energiedichte des elektrischen Feldes . . . . .	168
Die Wellengleichung als Folge der Maxwellschen Gleichungen . . . . .	170
Die Eichung des Vektorpotentials . . . . .	171
Die Kontinuitätsgleichung bei kompressiblen Medien . . . . .	172
Erweiterung der Kontinuitätsgleichung auf chemische Reaktionen . . . . .	173
Der Lagrange-Satz über die Wirbelfreiheit . . . . .	174
Das Quadrupolmoment . . . . .	176
<b>7.6 Übungsaufgaben Nr. 118 bis Nr. 130 . . . . .</b>	<b>177</b>

## § 8. Zylinder- und Kugelkoordinaten

<b>8.1 Zylinderkoordinaten . . . . .</b>	<b>179</b>
Die Koordinaten-Umrechnung . . . . .	179
Die Vektdarstellung in Zylinderkoordinaten . . . . .	180
Die Transformationsgleichungen für Vektoren . . . . .	181
Spezielle Vektoren in Zylinderkoordinaten . . . . .	182
<b>8.2 Differentiationen in Zylinderkoordinaten . . . . .</b>	<b>182</b>
Die Differentiation der Koordinaten-Einsvektoren . . . . .	182
Der Gradient in Zylinderkoordinaten . . . . .	183
Die Divergenz in Zylinderkoordinaten . . . . .	186
Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten . . . . .	187
Die Rotation in Zylinderkoordinaten . . . . .	187
Die Zweckmäßigkeit der Zylinderkoordinaten für zylindersymmetrische Felder . . . . .	189
<b>8.3 Kugelkoordinaten . . . . .</b>	<b>190</b>
Die Koordinaten-Umrechnung . . . . .	190
Die Transformationsgleichungen für Vektoren . . . . .	191
<b>8.4 Differentiationen in Kugelkoordinaten . . . . .</b>	<b>192</b>
Die Differentiation der Koordinaten-Einsvektoren . . . . .	192
Der Gradient in Kugelkoordinaten . . . . .	193
Die Divergenz in Kugelkoordinaten . . . . .	194
Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten . . . . .	195
Die Rotation in Kugelkoordinaten . . . . .	196
Die Zweckmäßigkeit von Kugelkoordinaten bei kugelsymmetrischen Feldern . . . . .	197
<b>8.5 Flächen- und Volumenintegrale in Zylinderkoordinaten . . . . .</b>	<b>198</b>
Das Flächenintegral über eine Kreisfläche . . . . .	198

Das Flächenintegral über eine Zylinderfläche . . . . .	199
Das Flächenintegral über eine Kugelfläche . . . . .	199
Das Volumenintegral über einen zylindrischen Bereich . . . . .	200
Das Volumenintegral über eine Kugel . . . . .	200
<b>8.6 Anwendungsbeispiele . . . . .</b>	<b>201</b>
Das Hagen-Poiseuillesche Gesetz . . . . .	201
Eine besondere Eigenschaft der Funktion $S = 1/r$ . . . . .	203
Anwendung des Greenschen Satzes zur Integration der Poissons-Gleichung . . . . .	204
Aufbau eines Vektorfeldes aus seinen Quellen und Wirbeln . . . . .	206
<b>8.7 Übungsaufgaben Nr. 131 bis Nr. 148 . . . . .</b>	<b>208</b>
<i>Lösungen der Übungsaufgaben . . . . .</i>	<b>210</b>
<i>Sachverzeichnis . . . . .</i>	<b>237</b>