

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
1.1 Fokus und Ziele der Arbeit	3
1.2 Aufbau der Arbeit	5

Teil I Theoretischer Hintergrund und Forschungsstand

2 Theoretischer Hintergrund zum mathematischen Argumentieren	11
2.1 Argumentieren, Begründen, Beweisen – Begriffsklärungen	11
2.1.1 Argumentieren	12
2.1.2 Begründen	20
2.1.3 Beweisen	24
2.1.4 Ein Modell für den Zusammenhang zwischen Argumentieren, Begründen und Beweisen	31
2.1.5 Einordnung weiterer Begriffe: Logisches Schließen, Rechtfertigen, Herleiten, Kommunizieren, Erklären	40
2.2 Argumentieren als allgemeine mathematische Kompetenz	43
2.2.1 Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht	43
2.2.2 Mathematische Argumentationskompetenz	46
2.2.3 Zusammenhang zwischen dem Argumentieren und den anderen allgemeinen Kompetenzen der Bildungsstandards	48
2.3 Die Bedeutung des mathematischen Argumentierens	50
2.3.1 Funktionen des mathematischen Beweisens	51
2.3.2 Bedeutung des Argumentierens in der Disziplin Mathematik	53

2.3.3	Förderung inhaltsbezogener mathematischer Kompetenzen durch das Argumentieren	54
2.3.4	Förderung prozessbezogener und überfachlicher Kompetenzen durch das Argumentieren	57
2.3.5	Argumentieren als Instrument zur Lernstandseinschätzung	60
3	Forschungsstand zum Argumentieren im Analysisunterricht (aus Lehrerperspektive)	63
3.1	Studie zum Beweisverständnis von Lehrkräften aus den USA (Knuth)	65
3.2	Studie mit italienischen Lehrkräften zu <i>beliefs</i> zum und zum Umgang mit dem Beweisen (Furinghetti/Morselli)	68
3.3	Studie zu Beweisvorstellungen und eigenem Beweisen von deutschen und kanadischen Lernenden im Analysisunterricht (Grundey)	70
3.4	Studie zu <i>beliefs</i> deutscher Sekundarstufenlehrkräfte zum Analysisunterricht (Erens/Eichler)	73
3.5	Fazit: Forschungslücke für die vorliegende Arbeit	78
Teil II Interviewstudie zum Argumentieren im Analysisunterricht		
4	Methodik der Interviewstudie mit Lehrkräften	83
4.1	Forschungsinteresse, Forschungsgegenstand und Forschungsfragen	83
4.2	Leitfadengestützte, explorative (Experten)Interviews	85
4.3	Durchführung und Transkription der Interviews	90
4.4	Die Qualitative Inhaltsanalyse als Auswertungsmethode	93
4.4.1	Die Qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring	95
4.4.2	Die Qualitative Inhaltsanalyse nach Kuckartz	98
4.4.3	Die Auswertung der Lehrerinterviews – eine Synthese aus Mayring (2015) und Kuckartz (2016)	101
4.5	Qualitätssicherung in der qualitativen Forschung	108
4.5.1	Kriterien zur Beurteilung der Studiengüte	108
4.5.2	Maßnahmen zur Qualitätssteigerung der vorliegenden Studie	113
5	Ergebnisse und Diskussion der Analyse der Lehrerinterviews	119
5.1	Einschätzungen zur vorgelegten Schulbuchseite	121
5.2	Begriffsverständnis der Lehrkräfte zum Argumentieren	124

5.2.1	Ausgestaltung des Argumentierens	125
5.2.1.1	Art des Argumentierens	126
5.2.1.2	Gestalt der Argumentation	131
5.2.2	Gegenstände und Auslöser des Argumentierens	134
5.2.3	Zusammenhang und Unterscheidung der Begriffe <i>Argumentieren, Begründen und Beweisen</i>	140
5.3	Aktuelle Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht	143
5.3.1	Fallzusammenfassungen zur aktuellen Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht	143
5.3.2	Übergreifende Tendenzen bezüglich der aktuellen Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht	149
5.4	Die Bedeutung des mathematischen Argumentierens	155
5.4.1	Persönliches Anliegen der Befragten	155
5.4.2	Bedeutung für die Schüler	157
5.4.3	Positiv für das Unterrichten	159
5.4.4	Typischer mathematischer Prozess	160
5.5	Herausforderungen rund um das Argumentieren im Analysisunterricht	162
5.5.1	Herausforderungen durch Rahmenbedingungen	163
5.5.2	Herausforderungen beim Unterrichten	167
5.5.3	Herausforderungen in Zusammenhang mit Schülern	170
5.5.3.1	Schwierigkeiten der Schüler	171
5.5.3.1.1	Schülerschwierigkeiten im Allgemeinen	172
5.5.3.1.2	Schülerschwierigkeiten im Bereich Sprache	172
5.5.3.1.3	Schülerschwierigkeiten durch fehlende Voraussetzungen	178
5.5.3.1.4	Schülerschwierigkeiten im Prozess des Argumentierens (aktiv und passiv)	179
5.5.3.2	Probleme in Bezug auf Schüler	186
5.5.3.2.1	Heterogenität der Schüler	186
5.5.3.2.2	Weitere Probleme in Bezug auf Schüler	190
5.6	Fazit zu den Erkenntnissen aus der Interviewstudie und Zwischenfazit der Arbeit	192

Teil III Entwicklung und Evaluation einer Lernumgebung zum Argumentieren im Analysisunterricht

6 Theoretische Grundlagen für die Entwicklung einer Lernumgebung zum Argumentieren im Analysisunterricht	199
6.1 Lernumgebungen im Mathematikunterricht	199
6.2 Differenzierung	203
6.2.1 Begriffsklärung	204
6.2.2 Aufgabenbasierte Differenzierung im Mathematikunterricht	207
6.2.3 Blütenaufgaben	209
6.3 Sprache im Mathematikunterricht	211
6.3.1 Systematisierung von Sprache im (Mathematik-) Unterricht	213
6.3.2 Schwierigkeiten und Probleme durch Sprache im Mathematikunterricht	217
6.3.3 Schreiben im Mathematikunterricht	218
6.3.4 Sprachförderung im Mathematikunterricht	220
6.3.4.1 Ganzheitliche Sprachförderung	221
6.3.4.2 Fokussierte Sprachförderung	223
6.3.4.3 Wortspeicher	224
6.4 Lernen aus Lösungsbeispielen	226
6.4.1 Arten von Lösungsbeispielen	227
6.4.2 Wirksamkeit von Lösungsbeispielen	229
6.4.3 Struktur des Lernens mit (Sequenzen von) Lösungsbeispielen	233
7 Entwicklung einer differenzierenden, aufgabenbasierten Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen zum Argumentieren mit ganzrationalen Funktionen	235
7.1 Die Konstruktion der Aufgaben	238
7.1.1 Überblicksartige Schulbuchanalyse zur Ableitung ganzrationaler Funktionen	239
7.1.2 Die Aufgaben	241
7.1.3 Differenzierungspotenzial der Aufgaben	248
7.2 Entwicklung von Formulierungshilfen	250
7.3 Konstruktion eines vorangestellten Lösungsbeispiels	256
7.4 Vorschläge zu Methoden, Sozialformen und Medien	261

8 Qualitative Studie zur Evaluation der Lernumgebung	263
8.1 Teilnehmende Lehrkräfte	264
8.2 Die Methode der schriftlichen Interviews	265
8.3 Auswertungsmethodik	266
8.4 Ergebnisse	267
8.4.1 Gewählte Versionen der Lernumgebung	268
8.4.2 Beschreibung des Einsatzes der Lernumgebung im Unterricht	270
8.4.3 Evaluation des Lösungsbeispiels	271
8.4.4 Evaluation der Aufgaben	274
8.4.5 Evaluation des Differenzierungspotenzials	276
8.4.6 Evaluation der Formulierungshilfen und sprachliche Schwierigkeiten	277
8.4.7 Änderungswünsche der Befragten	280
8.5 Diskussion der Evaluationsstudie	282
 Teil IV Schlussbetrachtung	
9 Zusammenführung, Diskussion und Ausblick	287
 Literaturverzeichnis	295