

## Kapitel 1

### Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Leistungsmerkmale des klassischen Ethernet

1

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1 Einleitung                                                                            | 1   |
| 1.1.1 Die Binomialverteilung                                                              | 3   |
| 1.1.2 Die maximale Wahrscheinlichkeit von $p_1$                                           | 8   |
| 1.2 Die Erfolgswahrscheinlichkeit bei $k$ Versuchen                                       | 11  |
| 1.2.1 Die geometrische Verteilung                                                         | 11  |
| 1.3 Die diskrete Zufallsvariable                                                          | 15  |
| 1.3.1 Die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen                            | 16  |
| 1.4 Die durchschnittliche Anzahl der Versuche; der Erwartungswert                         | 19  |
| 1.4.1 Die durchschnittliche Anzahl der Kollisionen; der Erwartungswert                    | 28  |
| 1.5 Die Kanaleffizienz bei CSMA/CD                                                        | 30  |
| 1.6 Der Binary Exponential Backoff-Algorithmus                                            | 38  |
| 1.6.1 Simulation der Zufälligkeit                                                         | 46  |
| 1.7 Die durchschnittliche Anzahl sendender Stationen; der Erwartungswert                  | 48  |
| 1.8 Die Poisson-Verteilung selten sendender Stationen und der Erwartungswert              | 54  |
| 1.9 Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse                                             | 58  |
| 1.10 Varianz und Streuung der diskreten Zufallsvariablen                                  | 64  |
| 1.10.1 Herleitung der Varianz aus der erzeugenden Funktion                                | 68  |
| 1.10.1.1 Varianz und Streuung der geometrisch verteilten Zufallsvariablen                 | 69  |
| 1.10.1.2 Varianz und Streuung der binomialverteilten Zufallsvariablen                     | 71  |
| 1.10.1.3 Varianz und Streuung der Poisson-verteilten Zufallsvariablen                     | 74  |
| 1.11 Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung                      | 75  |
| 1.11.1 Der Erwartungswert und die Varianz einer stetigen Zufallsvariablen                 | 100 |
| 1.11.1.1 Der Erwartungswert der $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen           | 102 |
| 1.11.1.2 Die Varianz und die Streuung der $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen | 104 |
| 1.11.2 Die Wendepunkte der $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen                | 107 |
| 1.11.3 Der Erwartungswert der $N(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen                      | 110 |
| 1.11.4 Die Varianz und die Streuung der $N(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen            | 111 |
| 1.11.5 Die Wendepunkte der $N(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen                         | 112 |
| 1.11.6 Die Verteilungsfunktion der normalverteilten Zufallsvariablen                      | 116 |
| 1.12 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und unabhängige Ereignisse                             | 126 |
| 1.12.1 Die vollständige Wahrscheinlichkeit und die Formel von Bayes                       | 131 |
| 1.13 Zweidimensionale diskrete Zufallsvariablen                                           | 135 |
| 1.13.1 Verteilungsfunktion einer diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen             | 145 |
| 1.14 Mehrdimensionale diskrete Zufallsvariablen                                           | 148 |
| 1.15 Summen und Produkte von zwei- und mehrdimensionalen diskreten Zufallsvariablen       | 154 |
| 1.15.1 Die Kovarianz von zwei- und mehrdimensionalen diskreten Zufallsvariablen           | 160 |
| 1.15.2 Die Verteilungsfunktion einer diskreten mehrdimensionalen Zufallsvariablen         | 165 |

## Kapitel 2

### Grundzüge der Informationstheorie

169

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| 2.1 Der Informationsgehalt (die Formel von Hartley) | 169 |
| 2.2 Die Entropie (die Formel von Shannon)           | 173 |
| 2.3 Die Entropie unabhängiger Verbundzeichen        | 178 |

|                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------|-----|
| 2.4 Die Entropie abhängiger Verbundzeichen                   | 183 |
| 2.5 Informationsfluss und Kanalkapazität                     | 204 |
| 2.6 Kontinuierliche Nachrichtenquellen und zufällige Signale | 215 |
| 2.6.1 Die differentielle Entropie und Transinformation       | 219 |
| 2.6.2 Gleichmäßig verteilte Zufallssignale                   | 225 |
| 2.6.3 Normalverteilte Zufallssignale                         | 228 |
| 2.6.4 Die Kanalkapazität nach Shannon                        | 231 |

### Kapitel 3

## Stochastische Prozesse 234

|                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1 Einführung                                                                                  | 234 |
| 3.2 Markov-Ketten                                                                               | 234 |
| 3.2.1 Die Berechnung der Zustands- und Übergangswahrscheinlichkeit                              | 237 |
| 3.2.2 Stationäre Verteilung                                                                     | 243 |
| 3.2.3 Die Berechnung der Ankunftswahrscheinlichkeiten                                           | 247 |
| 3.2.4 Die Berechnung der Übergangszeiten                                                        | 250 |
| 3.3 Prozesse mit kontinuierlicher Zeit                                                          | 259 |
| 3.3.1 Der Poisson-Prozess                                                                       | 262 |
| 3.3.2 Die Exponentialverteilung als Grenzwert der geometrischen Verteilung                      | 267 |
| 3.4 Markov-Prozess                                                                              | 277 |
| 3.4.1 Der Birth- and Death-Prozess                                                              | 278 |
| 3.4.2 Die M/M/1-Warteschlange                                                                   | 282 |
| 3.4.2.1 Die durchschnittliche Anzahl von Nachrichten im System                                  | 284 |
| 3.4.2.2 Die durchschnittliche Anzahl von Nachrichten in der Warteschlange                       | 285 |
| 3.4.2.3 Die durchschnittliche Aufenthaltszeit einer Nachricht im System                         | 286 |
| 3.4.2.4 Die durchschnittliche Aufenthaltszeit einer Nachricht in der Warteschlange              | 286 |
| 3.4.2.5 Die Formeln von Little                                                                  | 287 |
| 3.4.2.6 Die Gamma-Funktion und die Erlang-Verteilung                                            | 290 |
| 3.4.2.6.1 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T$ = Wartezeit im Warteschlangensystem           | 293 |
| 3.4.2.6.2 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T_s$ = Wartezeit in der Warteschlange            | 298 |
| 3.4.3 Die M/M/1/k-Warteschlange                                                                 | 302 |
| 3.4.3.1 Die mittlere Anzahl von Nachrichten im System                                           | 303 |
| 3.4.3.2 Die mittlere Anzahl von Nachrichten in der Warteschlange                                | 305 |
| 3.4.3.3 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht im System                                  | 307 |
| 3.4.3.4 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht in der Warteschlange                       | 308 |
| 3.4.4 Die M/M/s-Multiserver-Warteschlange                                                       | 310 |
| 3.4.4.1 Die mittlere Anzahl von Nachrichten $E(L_s)$ in der Warteschlange                       | 315 |
| 3.4.4.2 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht $E(T_s)$ in der Warteschlange              | 316 |
| 3.4.4.3 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht $E(T)$ im System                           | 317 |
| 3.4.4.4 Die mittlere Anzahl von Nachrichten $E(L)$ im System                                    | 317 |
| 3.4.4.5 Die Erlang'sche C-Formel                                                                | 318 |
| 3.4.4.6 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T_s$ = Wartezeit in der Warteschlange              | 321 |
| 3.4.4.7 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T$ = Aufenthaltszeit im M/M/s-Warteschlangensystem | 328 |
| 3.4.5 Die M/M/s/k-Multiserver-Warteschlange                                                     | 335 |
| 3.4.5.1 Die mittlere Anzahl von Nachrichten $E(L_s)$ in der Warteschlange                       | 336 |
| 3.4.5.2 Die mittlere Anzahl von Nachrichten $E(L)$ im System                                    | 338 |

|                                                                                                             |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.4.5.3 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht $E(T_s)$ in der Warteschlange                          | 339        |
| 3.4.5.4 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht $E(T)$ im System                                       | 339        |
| 3.4.5.5 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T_s$ = Wartezeit in der Warteschlange                          | 342        |
| 3.4.5.5.1 Die Wartezeitverteilung in der Warteschlange des <b>M/M/1/k</b> -Systems                          | 348        |
| 3.4.5.6 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T$ = Aufenthaltszeit im M/M/s/k-Warteschlangensystem           | 351        |
| 3.4.5.6.1 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T$ = Aufenthaltszeit im <b>M/M/1/k</b> -Warteschlangensystem | 353        |
| 3.4.6 Warteschlangen für Quellen mit endlicher Anzahl von Nachrichten                                       | 355        |
| 3.4.6.1 Die mittlere Anzahl $E(L)$ von Nachrichten im System                                                | 359        |
| 3.4.6.2 Die mittlere Anzahl $E(L_s)$ von Nachrichten in der Warteschlange                                   | 359        |
| 3.4.6.3 Die mittlere Aufenthaltszeit $E(T)$ einer Nachricht im System                                       | 360        |
| 3.4.6.4 Die mittlere Aufenthaltszeit $E(T_s)$ einer Nachricht in der Warteschlange                          | 360        |
| <b>Kapitel 4</b>                                                                                            |            |
| <b>Zyklischer Redundanzcode (CRC) mit Fehlererkennung</b>                                                   | <b>363</b> |
| 4.1 Einleitung                                                                                              | 363        |
| 4.2 Cyclic Redundancy Code (CRC)                                                                            | 364        |
| 4.3 Die modulo $m$ Rechnung                                                                                 | 365        |
| 4.3.1 Die Arithmetik im Galois-Feld $GF(2)$                                                                 | 366        |
| 4.4 Fehlererkennung mit der Polynomcodemethode                                                              | 367        |
| 4.5 Zyklische Eigenschaften                                                                                 | 369        |
| 4.6 Modulo2 Division und Hardware                                                                           | 370        |
| 4.7 Modulo2 Division und Software                                                                           | 376        |
| 4.7.1 frame check sequence-Berechnung für 1 Oktet                                                           | 377        |
| 4.7.2 frame check sequence-Berechnung für $n$ Oktets                                                        | 380        |
| <b>Kapitel 5</b>                                                                                            |            |
| <b>Grundzüge der statistischen Systemtheorie</b>                                                            | <b>382</b> |
| 5.1 Funktion einer Zufallsgröße und ihr Erwartungswert                                                      | 382        |
| 5.2 Der Korrelationskoeffizient                                                                             | 384        |
| 5.3 Die Autokorrelationsfunktion                                                                            | 391        |
| 5.3.1 Beispiele für Autokorrelationsfunktionen                                                              | 395        |
| 5.3.2 Die Autokorrelationsfunktion des weißen Rauschens                                                     | 406        |
| 5.4 Der Dirac-Impuls                                                                                        | 408        |
| 5.4.1 Die Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses                                                            | 410        |
| 5.5 Die spektrale Leistungsdichte als Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion                   | 412        |
| 5.5.1 Beispiel 1: Die $e$ -Funktion und ihr Spektrum                                                        | 413        |
| 5.5.2 Beispiel 2: Der Dirac-Impuls und die zugehörige Spektralfunktion (weißes Rauschen)                    | 416        |
| 5.5.3 Beispiel 3: Die sinc-Funktion und ihr Spektrum                                                        | 417        |
| 5.5.4 Beispiel 4: Der Rechteckimpuls und die zugehörige Spektralfunktion                                    | 418        |
| 5.6 Die Autokorrelationsfunktionen periodischer Signale (z.B. Cosinusschwingung)                            | 420        |
| 5.6.1 Die spektrale Leistungsdichte der Cosinusfunktion                                                     | 423        |
| 5.7 Lineare zeitinvariante Systeme (LZI-Systeme)                                                            | 425        |
| 5.7.1 Das Faltungsintegral                                                                                  | 429        |
| 5.7.2 Die Übertragungsfunktion und ihr Zusammenwirken mit der Impulsantwort                                 | 436        |

|                                                                                  |            |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.7.3 Mittelwert und Autokorrelationsfunktion der Systemreaktionen               | 439        |
| 5.8 Grundständiges zur Kreuzkorrelationsfunktion                                 | 455        |
| 5.8.1 Die Kreuzkorrelationsfunktion im eingeschwungenen Zustand                  | 460        |
| 5.8.2 Die spektrale Kreuzleistungsdichte                                         | 462        |
| <b>5.9 Die Laplace-Transformation</b>                                            | <b>466</b> |
| 5.9.1 Basiseigenschaften und Transformations-Gleichungen                         | 466        |
| 5.9.2 Herleitung einfacher Bildfunktionen und der Konvergenzbereich              | 468        |
| 5.9.3 Rücktransformation in den Originalbereich                                  | 473        |
| 5.9.4 Die Methode der Partialbruchzerlegung                                      | 474        |
| 5.9.4.1 Bildfunktionen mit einfachen Polstellen                                  | 475        |
| 5.9.4.1.1 Der Ableitungssatz für die Originalfunktion                            | 480        |
| 5.9.4.2 Der Heavisidesche Entwicklungssatz für einfache Polstellen               | 482        |
| 5.9.4.3 Bildfunktionen mit mehrfachen Polstellen                                 | 485        |
| 5.9.4.3.1 Der Ableitungssatz für die Bildfunktion                                | 485        |
| 5.9.4.4 Die Methode des Koeffizientenvergleichs                                  | 491        |
| 5.9.5 Die Laplace-Transformation zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen | 493        |
| 5.9.5.1 Die Differentialgleichung 1ter Ordnung und ihre Lösung                   | 493        |
| 5.9.5.1.1 Der Faltungssatz zur Lösung von Differentialgleichungen                | 495        |
| 5.9.5.2 Die Differentialgleichung 2ter Ordnung und ihre Lösung                   | 497        |
| 5.9.5.3 Die Differentialgleichung n-ter Ordnung und ihre Lösung                  | 502        |
| <b>Kapitel 6</b>                                                                 |            |
| <b>Grundzüge der Funktionentheorie und die z-Transformation</b>                  | <b>508</b> |
| 6.1 Komplexe Zahlen                                                              | 508        |
| 6.2 Das komplexe Kurvenintegral der Funktion $f(z)$                              | 509        |
| 6.3 Zusammenhängende Gebiete                                                     | 511        |
| 6.3.1 Der Integralsatz von Cauchy                                                | 512        |
| 6.4 Die Integralformel von Cauchy                                                | 524        |
| 6.4.1 Verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel                                | 527        |
| 6.5 Laurent-Reihen                                                               | 530        |
| 6.6 Residuen                                                                     | 537        |
| 6.6.1 Der Residuensatz                                                           | 542        |
| 6.6.2 Berechnung der Residuen                                                    | 543        |
| <b>6.7 Die z-Transformation (ZT)</b>                                             | <b>547</b> |
| 6.7.1 Diskrete Signale und Konvergenzverhalten                                   | 547        |
| 6.7.2 Wichtige Eigenschaften der z-Transformation                                | 555        |
| 6.7.2.1 Linearität                                                               | 555        |
| 6.7.2.2 Der Verschiebungssatz                                                    | 555        |
| 6.7.2.3 Der Multiplikationssatz                                                  | 556        |
| 6.7.2.4 Der Dämpfungssatz                                                        | 556        |
| 6.7.2.5 Der Faltungssatz                                                         | 557        |
| 6.7.2.6 Die periodische Abtastfolge                                              | 557        |
| 6.7.3 Die rationale z-Transformierte                                             | 560        |
| 6.7.4 Die z-Rücktransformation ( $Z^{-1}$ )                                      | 560        |
| 6.7.4.1 Die Rücktransformation mit der Residuenmethode                           | 561        |
| 6.7.4.2 Die Rücktransformation mit Partialbruchzerlegung und geometrischer Reihe | 566        |
| 6.7.5 Differenzengleichungen                                                     | 568        |
| 6.7.6 Die Übertragungsfunktion $G(z)$                                            | 572        |

|                                                                                                |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.7.6.1 Die Impulsantwort $g(n)$                                                               | 573        |
| 6.7.6.2 Die Sprungantwort $h(n)$                                                               | 573        |
| 6.7.7 z-Rücktransformation mit Differenzengleichungen                                          | 574        |
| 6.7.8 Frequenzgang $F(\omega)$ , Amplitudengang $A(\omega)$ und Phasenwinkel $\varphi(\omega)$ | 575        |
| 6.7.9 Stabilitätskriterien im Bildbereich                                                      | 578        |
| <b>Kapitel 7</b>                                                                               |            |
| <b>Ergänzungen zur Laplace-Transformation</b>                                                  | <b>581</b> |
| 7.1 Bildfunktionen mit einfachen komplexen Polstellen                                          | 581        |
| 7.1.1 Die äquivalente Form der Partialbruchzerlegung                                           | 582        |
| 7.2 Der Integralsatz für die Originalfunktion                                                  | 588        |
| 7.3 RCL-Netzwerke                                                                              | 591        |
| 7.3.1 Das Ohm'sche Gesetz im Bildbereich                                                       | 592        |
| 7.3.2 Übertragungsfunktion, Impuls- und Sprungantwort                                          | 595        |
| <b>8. Anhang</b> (Tabellen der Fourier- Laplace- und z-Transformierten)                        | 600        |
| <b>9. Personen- und Sachregister</b>                                                           | 606        |
| <b>10. Literatur</b>                                                                           | 619        |