

Gerhard Bohm, Günter Zech

Einführung in Statistik und Messwertanalyse für Physiker

SUB Göttingen

7

219 110 697



2006 A 12486

Verlag Deutsches Elektronen-Synchrotron

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Ziel der Statistik	1
1.2	Wie definieren wir Wahrscheinlichkeit?	3
1.3	Zufallseignisse und -variable	5
1.4	Mathematische Axiome und Sätze	6
1.4.1	Axiome	6
1.4.2	Bayes-Theorem	7
1.5	Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu Ereignissen	9
2	Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihre Eigenschaften	11
2.1	Definition	11
2.1.1	Diskrete Verteilungen	12
2.1.2	Kontinuierliche Verteilungen	13
2.1.3	Empirische Verteilungen	15
2.2	Erwartungswerte	16
2.2.1	Definition und Eigenschaften des Erwartungswerts	17
2.2.2	Mittelwert	17
2.2.3	Varianz	18
2.2.4	Schiefe	22
2.2.5	Kurtosis (Exzess)	22
2.2.6	Diskussion	23
2.2.7	Beispiele	25
2.3	Momente und charakteristische Funktion	29
2.3.1	Momente	29
2.3.2	Charakteristische Funktion	30
2.3.3	Beispiele	33
2.4	Variablentransformationen	36
2.4.1	Berechnung der transformierten Dichte	36
2.4.2	Berechnung der passenden Transformation	40
2.5	Multivariate Wahrscheinlichkeitsdichten	41
2.5.1	Wahrscheinlichkeitsdichte von zwei Variablen	41

2.5.2	Momente	44
2.5.3	Variablentransformation	46
2.5.4	Variablenreduktion	47
2.5.5	Berechnung der passenden Transformation	50
2.5.6	Verteilungen von mehr als zwei Variablen	51
2.5.7	Unabhängige, identisch verteilte Variable	52
2.6	Einige wichtige Verteilungen	52
2.6.1	Binomialverteilung	52
2.6.2	Multinomialverteilung	54
2.6.3	Poisson-Verteilung	55
2.6.4	Gleichverteilung	61
2.6.5	Normalverteilung	62
2.6.6	Exponentialverteilung	67
2.6.7	χ^2 -Verteilung	68
2.6.8	Gammaverteilung	70
2.6.9	Cauchy-Verteilung	71
2.6.10	Extremwertverteilung	72
3	Messfehler	75
3.1	Allgemeine Überlegungen	75
3.1.1	Bedeutung der Fehlerbestimmung	75
3.1.2	Überprüfung von zugeordneten Fehlern	76
3.1.3	Angabe von Fehlern	76
3.1.4	Definition des Messwertes und seiner Unsicherheit	77
3.2	Bestimmung der Messunsicherheit	78
3.2.1	Statistische Prozesse mit vorgegebener Form der Verteilung	78
3.2.2	Ablesen eines Messgeräts	79
3.2.3	Empirische Ermittlung aus einer Messreihe	79
3.2.4	Fehler der empirischen Varianz	80
3.3	Systematische Fehler	81
3.4	Lineare Fehlerfortpflanzung	83
3.4.1	Mittelung über mehrere Messwerte	83
3.4.2	Funktionelle Abhängigkeit von einer Messgröße	84
3.4.3	Fehler einer Funktion mehrerer Messgrößen	85
3.4.4	Mehrere Funktionen mehrerer Messgrößen	87
3.4.5	Beispiele	88
3.4.6	Verfälschung (Bias) einer Messung	91
3.5	Konfidenzintervalle	92
4	Monte-Carlo-Simulation	95
4.1	Einleitung	95
4.2	Erzeugung einfacher statistischer Verteilungen	97
4.2.1	Pseudozufallszahlen im Computer	97

4.2.2	Erzeugungen einfacher Verteilungen durch Variablentransformationen	99
4.2.3	Einfache Wegwerfmethode zur Erzeugung von Verteilungen	103
4.2.4	Majorantenmethode	104
4.2.5	Behandlung additiver Wahrscheinlichkeitsdichten	107
4.2.6	Wichtung der Ereignisse	108
4.2.7	Migrationsmethode	109
4.3	Lösung von Integralen	112
4.3.1	Primitive Wegwerfmethode	112
4.3.2	Verbesserte Wegwerfmethode	114
4.3.3	Wichtungsmethode	116
4.3.4	Rückführung auf Erwartungswerte	118
4.3.5	Intervallbildung	118
4.4	Allgemeine Bemerkungen	118
5	Parameterschätzung I	121
5.1	Einführung	121
5.2	Schätzung bei gegebener Priorwahrscheinlichkeit	124
5.2.1	Diskrete Hypothesen	124
5.2.2	Kontinuierliche Parameter	126
5.3	Definition und anschauliche Bedeutung der Likelihood	127
5.4	Das Likelihoodverhältnis - Beispiele	131
5.5	Die Maximum-Likelihood-Methode zur Parameterbestimmung	134
5.5.1	Das Rezept bei einem unbekannten Parameter	135
5.5.2	Beispiele	136
5.5.3	Likelihoodanpassung für mehrere Parameter	139
5.5.4	Kombination von Messungen	140
5.5.5	Likelihood für Histogramme	141
5.5.6	Erweiterte Likelihood	144
5.5.7	Weitere Beispiele	144
5.5.8	Kurvenanpassung an Messpunkte	146
5.5.9	Komplizierte Likelihoodfunktionen	147
5.5.10	Vergleich von Beobachtungen mit einer Monte-Carlo- Simulation	149
5.6	Berücksichtigung von Zwangsbedingungen	153
5.7	Reduktion des Variablenraums	155
5.7.1	Das Problem	155
5.7.2	Zwei Variable und ein linearer Parameter	155
5.7.3	Verallgemeinerung auf mehrere Variable und Parameter	156
5.7.4	Nichtlineare Parameter	158
5.7.5	Methode des approximierten Likelihoodschätzers	158
5.8	Eliminieren von Störparametern	161
5.8.1	Faktorisierung der Likelihood	162
5.8.2	Parametertransformation, Restrukturierung	162

XII Inhaltsverzeichnis

5.8.3	Formale Restrukturierung	164
5.8.4	Profillikelihood	165
5.8.5	Integration über den Störparameter	166
5.8.6	Explizite Angabe der Abhängigkeit vom Störparameter	166
5.8.7	Empfehlung	167
6	Parameterschätzung II	169
6.1	Likelihood und Information	169
6.1.1	Erschöpfende Statistiken	169
6.1.2	Das Konditionierungsprinzip	171
6.1.3	Das Likelihoodprinzip	172
6.1.4	Bias von Maximum-Likelihood-Ergebnissen	173
6.1.5	Anwendung von Abbruchregeln	176
6.2	Weitere Methoden der Parameteranpassung	178
6.2.1	Momentenverfahren	178
6.2.2	Methode der kleinsten Quadrate	180
6.2.3	Lineare Regression	182
6.3	Zusammenfassung und Vergleich der Parameterschätzverfahren	183
7	Intervallschätzung	185
7.1	Einführung	185
7.2	Fehlerintervalle	186
7.2.1	Parabolische Näherung	187
7.2.2	Allgemeiner Fall	188
7.3	Einseitige Grenzen	193
7.3.1	Allgemeiner Fall	193
7.3.2	Obere Poisson-Grenzen, einfacher Fall	194
7.3.3	Poisson-Grenzen bei Daten mit Untergrund	195
7.3.4	Unphysikalische Parameterwerte	198
8	Entfaltung	199
8.1	Einführung	199
8.1.1	Das Problem	199
8.1.2	Entfaltung durch Matrixinversion	202
8.1.3	Die Transfermatrix	204
8.1.4	Regularisierung	205
8.2	Entfaltung von Histogrammen	206
8.2.1	Die Likelihoodfunktion	206
8.2.2	Stärke der Regularisierung	207
8.2.3	Überlegungen zum Binning	207
8.2.4	Wahl der Regularisierungsfunktion	208
8.2.5	Iterative Entfaltung	209
8.2.6	Regularisierung der Transfermatrix	212
8.3	Binningfreie Verfahren	214
8.3.1	Iterative Entfaltung	214

8.3.2	Migrationsverfahren	214
8.4	Vergleich der Verfahren	216
8.5	Fehlerabschätzung für die entfaltete Verteilung	217
8.6	Entfaltung von Spektren hoher Statistik	220
8.6.1	Entropieverfahren	220
9	Signifikanztests	223
9.1	Einführung	223
9.2	Der χ^2 - Test in verallgemeinerter Form	227
9.2.1	Die Idee des χ^2 -Vergleichs	227
9.2.2	Die χ^2 -Verteilung und der χ^2 -Test	228
9.2.3	Verallgemeinerung auf beliebige Messwerte	230
9.2.4	Die Wahl des Binning	231
9.2.5	Der χ^2 -Test bei Anpassung von Parametern	233
9.2.6	χ^2 -Test bei kleinen Proben	234
9.3	Der Likelihoodverhältnistest für Histogramme	234
9.4	Der Kolmogorov-Smirnov-Test	235
9.5	Weitere verteilungsfreie Tests ohne Binning	236
9.5.1	Tests der Kolmogorov-Smirnov und Cramer-v.Mises-Familien	237
9.5.2	Der Neymansche Glattheitstest	238
9.5.3	Der Energietest	239
9.5.4	Der L_2 -Test	242
9.5.5	Problemangepasste Tests	242
9.6	Vergleich unterschiedlicher Testverfahren	244
9.6.1	Univariate Verteilungen	244
9.6.2	Multivariate Verteilungen	245
9.7	Vergleich von Proben	246
9.7.1	Die Problemstellung	246
9.7.2	χ^2 - und Kolmogorov-Smirnov-Test	247
9.7.3	Der Energietest	247
10	Statistisches Lernen	251
10.1	Einführung	251
10.2	Funktionsnäherung	253
10.2.1	Wichtungsmethoden	254
10.2.2	Orthogonalfunktionen	255
10.2.3	Wavelets	256
10.2.4	Splineanpassung	258
10.2.5	Anpassung mit allgemeinen Funktionen	261
10.2.6	Beispiel	261
10.3	Hauptkomponentenanalyse, Faktorenanalyse	263
10.4	Klassifizierung	268
10.4.1	Diskriminanzanalyse	269
10.4.2	Neuronale Netze	270

XIV Inhaltsverzeichnis

10.4.3	Wichtungsmethoden	277
10.4.4	Entscheidungsbäume	281
10.4.5	Vergleich der Methoden	284
11	Hilfsmethoden	287
11.1	Dichteschätzung	287
11.2	Bootstrap	289
11.2.1	Einführung	289
11.2.2	Definitionen und Varianzschätzung	290
11.2.3	Genauigkeit der Fehlerschätzung	291
11.2.4	Konfidenzintervalle	293
11.2.5	Vergleich von zwei Proben	293
12	Anhang	295
12.1	Allgemeine Sätze, Aspekte der Häufigkeitsstatistik	295
12.1.1	Allgemeine Eigenschaften von Punktschätzungen	295
12.1.2	Klassische Konfidenzintervalle	302
12.2	P-Werte für EDF-Statistiken	307
12.3	Extremwertsuche	308
12.3.1	Monte-Carlo-Suche	310
12.3.2	Simplexverfahren	310
12.3.3	Parabelmethode	310
12.3.4	Gradientenabstiegsverfahren	311
12.3.5	Stochastische Elemente bei der Minimumsuche	313
12.4	Formeln für B-Splinefunktionen	314
12.4.1	Lineare B-Splines	314
12.4.2	Quadratische B-Splines	315
12.4.3	Kubische B-Splines	315
	Sachverzeichnis	323