

Hanswalter Giesekeus

Phänomenologische Rheologie

Eine Einführung

Mit 176 Abbildungen

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York

London Paris Tokyo

Hong Kong Barcelona Budapest

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Definition und Zielsetzung der Rheologie.	1
1.2	Gliederung der Rheologie.	3
1.3	Struktur und Leitziele dieses Buches.	5
2	Kinematische Grundlagen	9
2.1	Das Konzept des materiellen Kontinuums.	9
2.2	Körper, Konfiguration, Bewegung	9
2.3	Verformungsgradient. Jacobi-Determinante.	11
2.4	Lokale und substantielle zeitliche Ableitungen lokaler Größen	15
2.5	Substantielle zeitliche Ableitungen integraler Größen.	18
3	Dynamische und thermodynamische Grundlagen	21
3.1	Masse, Dichte, Kontinuitätsgleichung	21
3.2	Kräfte und Spannungen im Kontinuum.	23
3.3	Impulsbilanz.	27
3.4	Drehimpulsbilanz	28
3.5	Verformungsarbeit	29
3.6	Der erste Hauptsatz der Thermodynamik	31
3.7	Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik	32
3.8	Das zentrale Problem der Rheologie. Grenzfälle des Stoffverhaltens	34
4	Verformungs- und Dehnungsmaße.	37
4.1	Verformung und Drehung	37
4.2	Cauchy-Greenscher Verformungstensor.	37
4.3	Greenscher Verformungstensor.	39
4.4	Fingerscher und Piolascher Verformungstensor.	40
4.5	Relative Verformungs- und Dehnungsmaße.	42
4.6	Invarianten der Verformungs- und Dehnungstensoren	43
4.7	Polare Zerlegung. Drehungs- und Streckungstensoren.	44
4.8	Henckysches Dehnungsmaß	45
4.9	Infinitesimales Dehnungsmaß.	46
4.10	Spezielle Verformungen.	49
4.10.1	Homogene Verformungen.	49

4.10.2	Starre Bewegungen	50
4.10.3	Isotrope und isochore Verformungen	50
4.10.4	Drehungsfreie Verformungen	51
4.10.5	Einfache Scherung	53
4.11	Exkurs: Kompatibilitätsbedingungen	62
5	Verformungskinematik	65
5.1	Objektiv äquivalente Bewegungen	65
5.2	Verformungs- und Drehgeschwindigkeitstensor	66
5.3	Homogene stationäre Strömungsfelder	70
5.3.1	Verformungs- und Dehnungsmaße	70
5.3.2	Strömungsfelder mit nilpotenten und nicht-nilpotenten Geschwindigkeitsgradienten	71
5.3.3	Exkurs: Klassifizierung der stationären Strömungen	72
5.3.4	Exkurs: Der Einfluß von Verformungsgeschwindigkeits- und Drehgeschwindigkeitsanteil auf die Strömungsform	77
5.3.5	Exkurs: Die Klasse der ebenen stationären Strömungen	84
5.4	Homogene Strömungen mit konstanter Verformungsgeschichte	88
5.5	Exkurs: Kompatibilitätsbedingungen für inhomogene Strömungsfelder	91
5.6	Kinematische Tensoren	92
5.6.1	Verformungsgeschichte und kinematische Tensoren	92
5.6.2	Geschwindigkeitsgradienten höherer Ordnung	92
5.6.3	Rivlin-Ericksen-Tensoren. Kovariante kinematische Tensoren	93
5.6.4	Kontravariante und korotatorische kinematische Tensoren	96
5.6.5	Kinematische Tensoren für Strömungen mit konstanter Verformungsgeschichte	98
5.7	Konvektive und korotatorische Ableitungen von Tensoren	100
5.8	Exkurs: Mitgeführte und mitrotierende Koordinatensysteme	103
5.8.1	Mitgeführte Koordinatensysteme	103
5.8.2	Differentiation von Vektorkomponenten	105
5.8.3	Differentiation von Tensorkomponenten	106
5.8.4	Differentiation von relativen Tensorkomponenten	107
5.8.5	Mitrotierende Koordinatensysteme	109
5.8.6	Regeln für das Rechnen mit konvektiven und korotatorischen Ableitungen	111
6	Rheologische Stoffgesetze	113
6.1	Phänomenologischer und struktureller Zugang	113
6.2	Bestimmtheitsprinzipien	114
6.3	Invarianzprinzipien	116
6.4	Spezielle Stoffklassen	117
6.4.1	Ideale Stoffe	117
6.4.2	Einfache Stoffe	118

6.4.3	Homogene Stoffe und homogene Verformungen.119
6.4.4	Isotrope und anisotrope Stoffe.122
6.4.5	Flüssigkeiten.124
6.4.6	Stoffe, die ein thermodynamisches Gleichgewicht besitzen	.126
6.4.7	Stoffe mit inneren Zwangsbedingungen.127
6.4.7.1	Dichtebeständige Stoffe.129
6.4.7.2	Unstreckbare Stoffe.129
6.4.7.3	Starre Körper.130
7	Elastische Stoffe.131
7.1	Der elastische Körper.131
7.1.1	Elastizität nach Cauchy.131
7.1.2	Der isotrope elastische Körper.132
7.1.3	Isotrop-lineare und infinitesimale Elastizität134
7.1.4	Der anisotrope elastische Körper.138
7.2	Der hyperelastische Körper.139
7.3	Spezielle homogene Verformungen isotroper elastischer Körper .	.145
7.3.1	Bilanzgleichungen für homogene Verformungen.145
7.3.2	Isotrope Verformung.145
7.3.3	Einfache Dehnung.146
7.3.4	Planare Dehnung dichtebeständiger Körper.148
7.3.5	Einfache Scherung.149
7.4	Elastische Flüssigkeiten.152
8	Viskose Flüssigkeiten155
8.1	Das Stoffgesetz der Reiner-Rivlin-Flüssigkeit155
8.1.1	Linear rein-viskose Flüssigkeiten.156
8.1.2	Nicht-linear rein-viskose Flüssigkeiten.157
8.2	Spezielle homogene Strömungen von Reiner-Rivlin-Flüssigkeiten	.161
8.2.1	Gleichförmige Dilatationsströmung.161
8.2.2	Einfache Dehnströmung.162
8.2.3	Einfache Scherströmung163
9	Viskoelastische Stoffe.167
9.1	Einschränkung des Stoffgesetzes bezüglich der Geschichte167
9.2	Spannungsrelaxation.169
9.3	Approximation durch Mehrfach-Integrale.170
9.4	Rivlin-Sawyers- und K-BKZ-Flüssigkeiten.174
9.5	Walters-Flüssigkeiten.175
9.6	Rivlin-Ericksen-Flüssigkeiten. Approximation für langsame Strömungen179
9.7	Flüssigkeitsmodelle vom Raten-Typ.184
9.7.1	Modelle vom Maxwell- und Oldroyd-Typ.184
9.7.2	Das Oldroydsche Acht-Konstanten-Modell.187
9.7.3	Das Giesekus-Modell.190
9.8	Strömungen mit konstanter Verformungsgeschichte.191

9.9	Einfache Dehnströmung	192
9.9.1	Dehnviskosität bei der Approximation für langsame Strömungen	192
9.9.2	Dehnviskosität bei der Oldroydschen Acht-Konstanten-Flüssigkeit	193
9.9.3	Dehnviskosität bei der Giesekus-Flüssigkeit	196
9.10	Einfache Scherströmung	197
9.10.1	Die viskosimetrischen Funktionen einer viskoelastischen Flüssigkeit	197
9.10.2	Die viskosimetrischen Funktionen bei der Approximation für langsame Strömungen	201
9.10.3	Die viskosimetrischen Funktionen der Acht-Konstanten-Oldroyd-Flüssigkeit	203
9.10.4	Die viskosimetrischen Funktionen der Giesekus-Flüssigkeit	207
9.11	Empirische Gleichungen für Scherspannung oder Scherviskosität	209
9.12	Relaxation nach ruckartiger Verformungsbeanspruchung	217
9.12.1	Der Relaxationsverlauf bei den Walters-Flüssigkeiten	217
9.12.2	Der Relaxationsverlauf bei den Oldroyd-Flüssigkeiten	218
9.12.3	Der Relaxationsverlauf bei der Giesekus-Flüssigkeit	219
9.13	Anlaufverhalten	223
9.13.1	Der Anlaufvorgang bei Integralmodellen	223
9.13.2	Der Anlaufvorgang bei Modellen vom Raten-Typ	224
9.13.2.1	Johnson-Segalman-Modell	225
9.13.2.2	Giesekus-Modell	229
9.14	Oszillatorisches Verhalten	231
9.14.1	Oszillationen in einem isotropen linear-elastischen Festkörper	231
9.14.2	Oszillationen in einer Maxwell-Oldroyd-Flüssigkeit B	232
9.14.3	Oszillationen bei nicht-harmonisch-periodischen Verformungen	236
10	Lineare Theorie des viskoelastischen Verhaltens	239
10.1	Induktiver Aufbau der Theorie	239
10.2	Hookescher Körper und newtonsche Flüssigkeit	241
10.3	Die einfachsten viskoelastischen Stoffe	242
10.3.1	Kelvin-Voigt-Körper und Maxwell-Flüssigkeit	242
10.3.2	Grundfunktionen der sprungartigen Beanspruchung	244
10.3.3	Symbolische Darstellung der Stoffgesetze mittels Netzwerkschaltungen aus Federn und Dämpfern	249
10.3.4	Exkurs: Netzwerke für elasto-visko-plastisches Stoffverhalten	250
10.3.5	Verformungsarbeit, gespeicherter und dissipierter Anteil bei Kelvin-Voigt-Körper und Maxwell-Flüssigkeit	252
10.4	Viskoelastische Stoffe mit drei und vier Parametern	258
10.4.1	Drei-Parameter-Festkörper	258

10.4.2	Drei-Parameter-Flüssigkeit	261
10.4.3	Vier-Parameter-Festkörper.	264
10.4.4	Vier-Parameter-Flüssigkeit	268
10.4.5	Mechanische Modelle und Stoffstruktur.	270
10.5	n-Parameter-Stoffe.	273
10.5.1	Die kanonischen Darstellungen.	273
10.5.2	Stoffgesetze und Grundfunktionen.	274
10.6	Stoffe mit kontinuierlichen Spektren.	279
10.6.1	Grundfunktionen und Spektren.	279
10.6.2	Exkurs: Unechte Flüssigkeiten.	281
10.7	Grundfunktionen der impulsartigen Beanspruchung	283
10.8	Grundfunktionen der harmonisch-periodischen Beanspruchung	286
10.8.1	Komplexe Grundfunktionen . Gespeicherte und dissipierte Arbeit	286
10.8.2	Komplexe Grundfunktionen der n-Parameter-Stoffe	290
10.8.3	Komplexe Grundfunktionen der Stoffe mit kontinuierlichen Spektren.	293
10.8.4	Exkurs: Äquivalentes Kelvin-Voigt- und äquivalentes Maxwell-Modell.	294
10.8.5	Exkurs: Cox-Merz-Regel und verwandte Korrelationen	297
10.9	Allgemeine Beanspruchungen.	298
10.10	Beziehungen zwischen den Grundfunktionen I	301
10.10.1	Die Volterra-Integralgleichungen.	301
10.10.2	Abschätzungen.	303
10.11	Beziehungen zwischen den Grundfunktionen II	305
10.11.1	Umrechnung mittels Laplace- und Carson-Transformation	305
10.11.2	Exkurs: Beweis einiger für n-Parameter-Stoffe gültigen Beziehungen.	307
10.11.3	Exkurs: Der komplexe Modul der unechten Flüssigkeit	310
10.11.4	Die Kronig-Kramersschen Beziehungen.	311
10.11.5	Umrechnung von Spannungs- und Verformungsverläufen durch Fourier-Transformation.	313
10.12	Die Struktur der linearen Theorie der Viskoelastizität	314
10.12.1	Die Funktionaloperatoren und ihre Darstellungen	314
10.12.2	Struktur der Theorie und Probleme ihrer Anwendung	317
10.12.3	Deduktive Ableitung der linearen Theorie.	319
10.12.4	Einige Anmerkungen zur traditionellen Darstellung der linearen Theorie.	321
10.13	Formulierung der Theorie für allgemeine Beanspruchungen	324
10.13.1	Allgemeine Operator-Gleichungen.	324
10.13.2	Operator-Gleichungen und komplexe Grundfunktionen für die einfache Dehnung.	324
10.13.3	Exkurs: Die Dehnverformung einiger einfacher Stoffe. Grenzwerte des Poisson-Verhältnisses.	328
10.14	Viskoelastischen Eigenschaften von Polymeren.	333

10.14.1 Die Grundfunktionen der verschiedenen Typen von Polymersystemen.	333
10.14.2 Reduzierte Variablen und Master-Kurven.	336
10.15 Meßmethoden zur Erfassung der Theologischen Stoffeigenschaften	336
11 Einfache Verformungs- und Strömungsprobleme.	341
11.1 Problemstellung.	341
11.2 Torsion eines elastischen Zylinders.	342
11.3 Wellenausbreitung in viskoelastischen Stoffen.	345
11.3.1 Transversalwellen im Halbraum.	346
11.3.1.1 Harmonisch-periodische Erregung.	347
11.3.1.2 Allgemeine Erregung.	352
11.3.1.3 Das Rayleigh-Problem.	359
11.3.2 Transversalwellen zwischen zwei Parallelplatten.	362
11.4 Erzwungene und freie Schwingungen viskoelastischer Stoffe . . .	369
11.4.1 Schwingungsviskosimeter.	369
11.4.2 Torsionspendel.	382
11.4.3 Exkurs: Torsionsschwingungsdämpfer.	384
11.4.4 Maxwell-Orthogonal-Rheometer.	395
11.5 Stationäre Schichtenströmungen.	401
11.5.1 Charakterisierung der stationären Schichtenströmungen .	401
11.5.2 Kegel-Platte-Strömung.	402
11.5.3 Platte-Platte-Strömung.	404
11.5.4 Couette-Strömung.	408
11.5.4.1 Weissenberg-Effekt.	411
11.5.4.2 Exkurs: Strömung in einer geneigten offenen Rinne.	412
11.5.4.3 Couette-Viskosimetrie.	413
11.5.4.4 Exkurs: Gleitlagerströmung.	419
11.5.5 Stationäre ebene Schichtenströmung.	420
11.5.6 Stationäre Kanalströmung.	425
11.5.7 Poiseuille-Strömung.	430
11.5.8 Stationäre Ringspaltströmung.	435
11.5.9 Exkurs: Bestimmung der wahren Fließkurve mit der Methode der repräsentativen Viskosität	437
11.5.10 Exkurs: Ein- und Auslaufkorrekturen für Rohr- und Kapillarviskosimeter.	442
11.5.11 Exkurs: Strahlaufweitung und Strahlimpuls-Methode . .	446
11.5.12 Exkurs: Lochdruck-Korrektur.	447
11.5.13 Stationäre Strömungen durch gerade Rohre mit beliebigem Querschnitt	448
11.5.14 Scherströmung zwischen zwei Ebenen mit Injektion und Absaugung.	452
11.5.14.1 Problemstellung.	452
11.5.14.2 Lösungen für die Oldroyd-Flüssigkeit	453

11.5.14.3	Lösungen für die Maxwell-Oldroyd-Flüssigkeit	458
11.5.14.4	Lösungen für die newtonsche Flüssigkeit	462
11.5.14.5	Allgemeine Folgerungen.	462
11.5.14.6	Lösungsansätze mit der Approximation zweiter Ordnung.	463
11.6	Instationäre Dehnströmungen.	467
11.6.1	Die Problematik der Realisierung stationärer Dehnströ- mungen.	467
11.6.2	Spinnrheometer.	468
11.6.3	Fano-Strömung	475
11.6.4	Andere Methoden zur Bestimmung der Dehnviskosität	477
12	Anspruchsvollere Strömungsprobleme.	481
12.1	Grundgleichungen und Lösungsmethoden.	482
12.1.1	Die verallgemeinerte Navier-Stokes-Gleichung.	482
12.1.2	Die direkte Methode.	483
12.1.3	Die Methode der Zerlegung in ein Quellen- und ein Wir- belfeld . Skalares Potential und Vektorpotential.	484
12.1.4	Ebene Strömungsfelder. Die Lagrangesche Stromfunktion	485
12.1.5	Rotationssymmetrische Strömungsfelder. Die Stokessche Stromfunktion.	487
12.1.6	Strömungsfelder mit kreisförmigen Stromlinien. Direkte Methode.	488
12.2	Störungsrechnung.	489
12.3	Hilfssätze zur Vereinfachung der Störungsrechnung	492
12.3.1	Hilfssatz von Giesekus.	493
12.3.2	Hilfssatz von Tanner und Pipkin.	494
12.3.3	Hilfssatz von Langlois, Rivlin und Pipkin.	496
12.3.4	Reziprozitätssatz von Lorentz.	497
12.4	Teilchen in Strömungen viskoelastischer Flüssigkeiten.	501
12.4.1	Kräfte auf eine Kugel in der einfachen Scherströmung	501
12.4.2	Bewegung und Orientierung schlanker Teilchen in der ein- fachen Scherströmung	505
12.4.3	Überblick über weitere Effekte an suspendierten Teilchen	510
12.4.3.1	Wechselwirkungen in viskoelastischen Flüssig- keiten.	510
12.4.3.2	Effekte in inhomogenen Strömungsfeldern	514
12.5	Sekundärströmungen.	515
12.5.1	Unterscheidung von Primär- und Sekundärströmung	515
12.5.2	Strömung um eine rotierende Kugel.	517
12.5.3	Strömung in einer Kegel-Platte-Anordnung	526
12.5.4	Einströmung in eine konische Düse.	527
12.5.5	Einströmung in eine Keilspaltdüse.	534
12.5.6	Strömung durch ein gerades Rohr mit elliptischem Quer- schnitt.	541

12.5.7	Strömung durch ein gekrümmtes Rohr mit kreisförmigem Querschnitt	544
12.5.8	Einige weitere Beispiele von Sekundärströmungen	546
12.6	Strömungsinstabilitäten	550
12.6.1	Klassifizierung der Instabilitätsphänomene	550
12.6.2	Stabilitätsanalyse	552
12.6.3	Instabilitäten vom Taylor-Typ	554
12.6.3.1	Zerlegung der Strömung in Grund- und Störströmung	554
12.6.3.2	Qualitative Vorbetrachtung	555
12.6.3.3	Die Störungsgleichungen für die Approximation zweiter Ordnung	556
12.6.3.4	Der Spezialfall des geraden Couette-Spaltes	558
12.6.3.5	Stationäre und oszillatorische Instabilitäten im gekrümmten Couette-Spalt	563
12.6.3.6	Vergleich mit experimentellen Befunden	563
12.6.4	Instabilitäten in Düsen und an freien Oberflächen	565
12.6.4.1	Schmelzenbruch	565
12.6.4.2	Instabilitäten beim Einströmen in konische und Keilspaltdüsen	566
12.6.4.3	Längsstreifige Freistrahlinstabilitäten	569
12.6.4.4	Verzugsresonanz und Strahlzerfall	569
12.6.4.5	Instabilitäten an ablaufenden Flüssigkeitsfilmen	570
12.6.5	Beispiele von weiteren Instabilitätstypen	571
12.6.5.1	Instabilitäten bei der Umströmung von Körpern	571
12.6.5.2	Thermo-viskoelastische Instabilitäten	572
12.6.6	Turbulenz	573
12.6.6.1	Klassifizierung	573
12.6.6.2	Viskoelastische Turbulenz	573
12.6.6.3	Widerstandsverminderung	573
12.6.6.4	Beeinflussung der Turbulenzstruktur	576
12.7	Schlußbemerkung	578
A	Anhang: Mathematische Hilfsmittel	579
A.1	Vektoren und Tensoren	579
A.1.1	Vektoralgebra	579
A.1.1.1	Definitionen	579
A.1.1.2	Basen und Komponenten im V_n	581
A.1.1.3	Kreuzprodukt und Mehrfachprodukte im V_3	582
A.1.1.4	Euklidischer Ortsraum und Koordinatentransformation	584
A.1.1.5	Exkurs: Komplexe Vektoren	586
A.1.2	Tensoralgebra	587
A.1.2.1	Tensoren zweiter Stufe als lineare Abbildungen des Vektorraums auf sich selbst	587

A.1.2.2	Komponenten eines Tensors.	589
A.1.2.3	Spezielle Tensoren, Produkte und Zerlegungen von Tensoren.	591
A.1.2.4	Tensorinvarianten im V_3	594
A.1.2.5	Hauptachsentransformation symmetrischer Ten- soren im V_3	597
A. 1.2.6	Cayley-Hamilton-Gleichung. Tensor-Polynome und isotrope Tensorfunktionen.	602
A.1.2.7	Isotrope Tensorfunktionen und Invarianten von mehreren Tensoren.	604
A.1.2.8	Darstellung von Vektoren und Tensoren mittels nicht-orthonormierter Basen.	607
A.1.3	Vektor- und Tensoranalysis.	609
A. 1.3.1	Vektor- und Tensorfelder. Linien-, Flächen- und Volumenintegrale.	609
A.1.3.2	Räumliche Differentiation von Feldfunktionen .	611
A. 1.3.3	Integralsätze.	614
A.1.3.4	Vektor- und Tensoranalysis in allgemeinen krumm- linigen Koordinatensystemen.	615
A. 1.3.5	Vektor- und Tensoranalysis in krummlinigen or- thogonalen Koordinatensystemen.	618
A.1.3.6	Vektor- und Tensoranalysis in Zylinder- und Kugelkoordinaten.	621
A.2	Laplace- und Fourier-Transformation.	624
A.2.1	Heaviside- und Dirac-Funktion.	624
A.2.2	Laplace-Transformation.	627
A.2.3	Fourier-Transformation.	628
	Literaturverzeichnis.	631
	Sachverzeichnis.	643