

Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften

Herausgegeben von

Prof. Dr. rer. oec. habil. Heinz Körth

Prof. Dr. rer. oec. habil. Carl Otto

Dr. rer. nat. Walter Runge

Prof. Dr. rer. nat. habil. Manfred Schoch

2. Auflage



Westdeutscher Verlag Opladen

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	23
1. Einführung in die Logik	27
1.1. Aussagen, Variable, Aussageformen	29
1.2. Aussagenverbindungen	32
1.3. Identitäten	35
1.3.1. Logisch äquivalente Aussagenverbindungen	35
1.3.2. Identitäten in Form einer Implikation	37
1.3.3. Schlußregeln	37
1.4. Elemente der Schaltalgebra	39
1.5. Quantifizierung von Aussageformen	43
Aufgaben	45
2. Grundbegriffe der Mengenlehre	47
2.1. Vorbemerkungen	49
2.2. Mengen und Teilmengen	50
2.3. Mengenoperationen	53

2.4.	Produktmengen, Relationen	58
2.4.1.	Produktmengen, Relationsbegriff	58
2.4.2.	Ordnungsrelationen	60
2.4.3.	Äquivalenzrelationen, Klasseneinteilungen	63
2.5.	Abbildungen, Funktionen, Operationen.....	65
2.6.	Gleichmächtigkeit von Mengen, Endlichkeit	70
	Aufgaben	71
3.	Zahlenbereiche	73
3.1.	Natürliche Zahlen	75
3.1.1.	Peanosches Axiomensystem	75
3.1.2.	Vollständige Induktion	78
3.2.	Ganze Zahlen	79
3.3.	Rationale Zahlen	80
3.4.	Reelle Zahlen	84
3.4.1.	Begriff und Operationen	84
3.4.2.	Ungleichungen und absoluter Betrag	87
3.4.3.	Darstellung reeller Zahlen (Zahlensysteme)	91
3.5.	Komplexe Zahlen.....	99
3.5.1.	Begriff der komplexen Zahl	99
3.5.2.	Rechnen mit komplexen Zahlen	100

3.5.3.	Polarkoordinaten, trigonometrische Darstellung	102
	Aufgaben	105
4.	Kombinatorik	107
4.1.	Summenzeichen	109
4.2.	Produktzeichen	114
4.3.	Aufgaben der Kombinatorik	116
4.4.	Permutationen	118
4.4.1.	Permutationen ohne Wiederholung	118
4.4.2.	Permutationen mit Wiederholung	120
4.5.	Variationen	121
4.5.1.	Variationen ohne Wiederholung	121
4.5.2.	Variationen mit Wiederholung	122
4.6.	Kombinationen	124
4.6.1.	Kombinationen ohne Wiederholung	124
4.6.2.	Kombinationen mit Wiederholung	128
4.7.	Binomial- und Polynomialsatz	131
4.7.1.	Eigenschaften des Eulerschen Symbols $\binom{n}{k}$	131
4.7.2.	Binomialsatz	133
4.7.3.	Polynomialsatz	135
	Aufgaben	136

5.	Lineare Algebra	141
5.1.	Matrixbegriff und spezielle Matrizen	143
5.2.	Matrizenrelationen	150
5.2.1.	Gleichheit von Matrizen	150
5.2.2.	Ungleichheit von Matrizen	152
5.3.	Matrizenoperationen	156
5.3.1.	Transponieren	156
5.3.2.	Matrizenaddition	158
5.3.3.	Matrizensubtraktion	162
5.3.4.	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	164
5.3.5.	Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor (Skalarprodukt)	168
5.3.6.	Multiplikation von Matrizen	170
5.4.	Linearkombination von Vektoren	178
5.5.	Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit von Vektoren	182
5.6.	Elementare Basistransformation	185
5.7.	Rang einer Matrix	198
5.8.	Konvexe Mengen	200
5.9.	Lineare Gleichungssysteme	205
5.9.1.	Begriff des linearen Gleichungssystems	205
5.9.2.	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	206
5.9.3.	Lineare Gleichungssysteme mit genau einer Lösung	209
5.9.4.	Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen	211
5.10.	Matrizeninversion	215

5.11.	Matrizengleichungen	221
5.12.	Lineare Ungleichungssysteme	224
5.12.1.	Begriff des linearen Ungleichungssystems	224
5.12.2.	Normales Ungleichungssystem mit beschränkter Lösungsmenge	227
5.13.	Determinanten	233
5.14.	Quadratische Formen und Definitheit	241
	Aufgaben	242
6.	Lineare Optimierung	257
6.1.	Einleitung	259
6.2.	Lineare Optimierungsmodelle und die Normalform der linearen Optimierungsaufgabe	261
6.2.1.	Lineare Optimierungsmodelle	261
6.2.2.	Normalform der linearen Optimierungsaufgabe	262
6.3.	Graphische Lösung von linearen Optimierungsaufgaben in zwei Variablen	269
6.4.	Grundlegende Eigenschaften linearer Optimierungsaufgaben	276
6.5.	Simplexmethode	278
6.5.1.	Simplexalgorithmus	279
6.5.2.	Zur numerischen Durchführung des Simplexalgorithmus	284
6.5.3.	Erzeugung einer ersten zulässigen Basislösung und der zugehörigen kanonischen Form – die Phase I der Simplexmethode	295

6.5.4.	Numerische Durchführung der zwei Phasen der Simplexmethode.....	301
6.6.	Dualitätstheorie der linearen Optimierung	308
6.6.1.	Paare dualer linearer Optimierungsaufgaben.....	309
6.6.2.	Eigenschaften von Paaren dualer linearer Optimierungsaufgaben	312
6.6.3.	Ökonomische Interpretation eines Paares dualer linearer Optimierungsaufgaben	317
6.7.	Dualer Simplexalgorithmus	318
6.7.1.	Theoretische Betrachtungen zum dualen Simplexalgorithmus	319
6.7.2.	Zur numerischen Durchführung des dualen Simplexalgorithmus	322
6.8.	Klassische Transportaufgabe	325
6.8.1.	Problemstellung und Modellkonstruktion	325
6.8.2.	Eigenschaften der klassischen Transportaufgabe und die Erzeugung zulässiger Basislösungen	329
6.8.3.	Erzeugung einer optimalen zulässigen Basislösung	338
6.8.4.	Zur numerischen Durchführung des Lösungsverfahrens für die klassische Transportaufgabe	346
6.9.	Parametrische lineare Optimierung.....	350
6.9.1.	Lineare Abhängigkeit der Bewertungskoeffizienten von einem Parameter	351
6.9.2.	Lineare Abhängigkeit des Erfordernisvektors von einem Parameter ..	359
6.10.	Diskrete lineare Optimierung	365
6.10.1.	Schnittebenenverfahren von Gomory	366
	Aufgaben	370

7.	Zahlenfolgen und -reihen	375
7.1.	Begriff der Zahlenfolge, spezielle Zahlenfolgen	377
7.1.1.	Erklärung der Zahlenfolge	377
7.1.2.	Arithmetische Zahlenfolgen	378
7.1.3.	Differenzenfolgen	380
7.1.4.	Geometrische Zahlenfolgen	381
7.1.5.	Beschränkte und monotone Zahlenfolgen	383
7.2.	Konvergente Zahlenfolgen	385
7.2.1.	Grenzwert von Zahlenfolgen	385
7.2.2.	Eigenschaften konvergenter Zahlenfolgen	388
7.2.3.	Divergente Zahlenfolgen	391
7.2.4.	Konvergenzkriterien	394
7.3.	Zahlenreihen	397
7.3.1.	Begriff der unendlichen Reihe	397
7.3.2.	Summe einer unendlichen Reihe	400
7.3.3.	Unendliche geometrische Reihe	402
7.3.4.	Konvergenzkriterien	405
	Aufgaben	408
8.	Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen	413
8.1.	Funktionen mit einer unabhängigen Variablen	415
8.1.1.	Eigenschaften und Typen von Funktionen	415

8.1.2.	Grenzwerte von Funktionen	419
8.1.3.	Stetigkeit	424
8.2.	Differenzierbarkeit	430
8.2.1.	Differentialquotient	430
8.2.2.	Differentiationsregeln	433
8.2.3.	Mittelwertsatz	436
8.2.4.	Differentiale	437
8.2.5.	Ableitungen höherer Ordnung	440
8.3.	Satz von Taylor; Taylorsche Reihen	441
8.3.1.	Satz von Taylor	441
8.3.2.	Taylorsche Reihen	448
8.3.3.	Exponential-, Logarithmus- und Potenzfunktion	455
8.4.	Anwendungen der Differentialrechnung zur Untersuchung von Funktionen	463
8.4.1.	Relative und absolute Extrema	463
8.4.2.	Monotonie, Konvexität, Konkavität	469
8.5.	Ökonomische Anwendungen der Differentialrechnung	473
8.5.1.	Optimale Losgröße	473
8.5.2.	Optimale Nutzungsdauer	476
8.5.3.	Optimale Laufzeit von Fördersonden	478
8.5.4.	Optimale Ankunftsintensität von Schiffen	481
	Aufgaben	483

9.	Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	487
9.1.	Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	489
9.1.1.	Grundbegriffe und geometrische Darstellung	489
9.1.2.	Grenzwerte und Stetigkeit	491
9.2.	Ableitung und Differential	493
9.2.1.	Partielle Ableitungen	493
9.2.2.	Vollständiges Differential	495
9.2.3.	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	497
9.2.4.	Fehlerabschätzungen	500
9.3.	Extremwerte	502
9.3.1.	Notwendige Bedingungen	503
9.3.2.	Hinreichende Bedingungen	505
9.3.3.	Extremwerte unter Nebenbedingungen	506
9.3.4.	Methode der kleinsten Quadratsumme	510
	Aufgaben	514
10.	Integralrechnung mit einer unabhängigen Variablen	517
10.1.	Unbestimmtes Integral	519
10.1.1.	Stammfunktion	519
10.1.2.	Grundregeln zur Ermittlung unbestimmter Integrale	520

10.1.3.	Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen	525
10.1.4.	Integration rationaler Funktionen	530
10.1.5.	Integration einiger spezieller Funktionen	533
10.2.	Bestimmtes Integral	534
10.2.1.	Flächeninhalt	534
10.2.2.	Bestimmtes (Riemannsches) Integral	536
10.2.3.	Integrierbarkeit monotoner und stetiger Funktionen	540
10.2.4.	Mittelwertsätze der Integralrechnung	541
10.2.5.	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	542
10.2.6.	Rechnen mit bestimmten Integralen	544
10.3.	Anwendungen der Integralrechnung	546
10.4.	Uneigentliche Integrale	550
10.4.1.	Integrale über unbeschränkte Intervalle	550
10.4.2.	Integrale von nicht beschränkten Funktionen	552
	Aufgaben	555
11.	Lineare Differential- und Differenzengleichungen	559
11.1.	Lineare Differentialgleichungen	561
11.1.1.	Allgemeine Bemerkungen und Definitionen	561
11.1.2.	Differentialgleichung 1. Ordnung	562
11.1.3.	Trennung der Variablen	563
11.1.4.	Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	566
11.1.5.	Sätze über die Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	570

11.1.6.	Homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung	574
11.1.7.	Homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung	578
11.1.8.	Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ..	580
11.1.9.	Methode der Variation der Konstanten für die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung	580
11.1.10.	Variation der Konstanten für die inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung	583
11.1.11.	Spezielle Lösungsansätze zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung	585
11.1.12.	Systeme von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung	589
11.1.13.	Homogene Systeme von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	590
11.1.14.	Inhomogene Systeme von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	596
11.1.15.	Eliminationsverfahren zur Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen	598
11.1.16.	Ökonomische Anwendungen von Differentialgleichungen	600
11.2.	Differenzenrechnung	606
11.2.1.	Funktion und ihre Differenzen	606
11.2.2.	Eigenschaften des Differenzenoperators	610
11.3.	Differenzengleichungen	612
11.3.1.	Definitionen	612
11.3.2.	Existenz- und Eindeigkeitssatz für lineare Differenzengleichungen ..	615
11.3.3.	Allgemeine Sätze über lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten	618

11.3.4.	Lineare Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	621
11.3.5.	Homogene lineare Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	623
11.3.6.	Homogene lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	627
11.3.7.	Inhomogene lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	628
11.3.8.	Systeme linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	632
11.4.	Zusammenhang zwischen Differenzen- und Differentialgleichungen ... Aufgaben	634 635
12.	Nichtlineare Optimierung	637
12.1.	Problemstellungen der nichtlinearen Optimierung	640
12.1.1.	Allgemeine Aufgabe der nichtlinearen Optimierung	640
12.1.2.	Graphische Lösung von nichtlinearen Optimierungsaufgaben in zwei Variablen	642
12.1.3.	Konvexe Funktionen	647
12.1.4.	Globale und relative Extrema	652
12.1.5.	Besonderheiten der nichtlinearen Optimierung	654
12.1.6.	Aufgaben der konvexen Optimierung	656
12.1.7.	Hyperbolische Optimierung	658

12.1.8.	Quadratische Optimierung	661
12.2.	Approximationsmethoden für Probleme mit trennbaren Funktionen ..	664
12.3.	Hyperbolische Optimierung	670
12.4.	Satz von Kuhn-Tucker	673
12.4.1.	Satz von Kuhn-Tucker für konvexe Probleme	673
12.4.2.	Bedingungen von Kuhn-Tucker für quadratische Probleme	676
12.5.	Quadratische Optimierung	679
12.5.1.	Allgemeine Aussagen über quadratische Probleme	679
12.5.2.	Dualität	680
12.6.	Gradientenverfahren	682
12.6.1.	Allgemeines Vorgehen der Gradientenverfahren	682
12.6.2.	Quadratischer Fall	684
	Aufgaben	693
 13.	 Dynamische Optimierung	 697
13.1.	Stellung der dynamischen Optimierung in der Optimierungstheorie ...	699
13.2.	Mehrstufige Entscheidungsprozesse	700
13.2.1.	Dynamische Systeme und Mehrstufenprozesse	700
13.2.2.	Mehrstufenentscheidungsprozesse	702
13.2.3.	Separable Mehrstufenentscheidungsprozesse	703
13.2.4.	Zusammenfassende Problemstellung	704
13.3.	Lösungsverfahren	704
13.3.1.	Optimalitätsprinzip	704

13.3.2.	Funktionalgleichungen	705
13.3.3.	Lösung der Funktionalgleichungen	707
13.3.4.	Fragen der praktischen Auswertung der Funktionalgleichungen	708
13.3.5.	Umkehrung der Optimierungsrichtung	710
13.4.	Ein Verteilungsproblem	713
13.5.	Wertung des Verfahrens und Ausblick	719
	Aufgaben	721
14.	Graphentheorie	725
14.1.	Grundlagen	728
14.1.1.	Ungerichtete Graphen	730
14.1.2.	Gerichtete Graphen	733
14.1.3.	Durchlaufungen	733
14.1.4.	Graphen und Matrizen	736
14.1.5.	Bäume und Gerüste	739
14.1.6.	Planare Graphen	742
14.2.	Anwendungen der Graphentheorie in der Ökonomie	745
14.2.1.	Kürzeste Wege	746
14.2.2.	Einiges über Netzplantechnik	748
14.2.3.	Spannungen auf Graphen	751
14.2.4.	Ströme auf Graphen	753
	Aufgaben	759

15.	Wahrscheinlichkeitsrechnung	761
15.1.	Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung	763
15.1.1.	Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung	763
15.1.2.	Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeit	765
15.1.3.	Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit	770
15.1.4.	Statistische Definition der Wahrscheinlichkeit	774
15.1.5.	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit	776
15.1.6.	Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	778
15.1.7.	Unabhängigkeit und Abhängigkeit von Ereignissen	786
15.1.8.	Zufallsgrößen	790
15.2.	Diskrete Verteilungen	796
15.2.1.	Verteilungsgesetz einer diskreten Zufallsgröße	796
15.2.2.	Erwartungswert und Streuung einer diskreten Zufallsgröße	803
15.2.3.	Weitere Parameter einer diskreten Zufallsgröße	810
15.2.4.	Erzeugende Funktion einer diskreten Zufallsgröße	813
15.2.5.	Mehrdimensionale diskrete Zufallsgrößen	815
15.3.	Spezielle diskrete Verteilungen	818
15.3.1.	Binomialverteilung	818
15.3.2.	Hypergeometrische Verteilung	825
15.3.3.	Geometrische Verteilung	826
15.3.4.	Poisson-Verteilung	828
15.3.5.	Polynomialverteilung	833
15.4.	Stetige Verteilungen	835
15.4.1.	Verteilungsgesetz einer stetigen Zufallsgröße	835

15.4.2.	Parameter einer stetigen Zufallsgröße.....	843
15.4.3.	Mehrdimensionale stetige Zufallsgrößen	846
15.5.	Spezielle stetige Verteilungen	848
15.5.1.	Gleichmäßige Verteilung.....	848
15.5.2.	Exponentialverteilung	852
15.5.3.	Normalverteilung.....	858
15.5.4.	Zweidimensionale Normalverteilung.....	869
	Aufgaben	871
Lösungen zu den Aufgaben		887
1.	Einführung in die Logik	889
2.	Grundbegriffe der Mengenlehre.....	890
3.	Zahlenbereiche	891
4.	Kombinatorik	893
5.	Lineare Algebra	896
6.	Lineare Optimierung	906
7.	Zahlenfolgen und -reihen	922
8.	Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen	931
9.	Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	934
10.	Integralrechnung mit einer unabhängigen Variablen	936
11.	Lineare Differential- und Differenzgleichungen	939
12.	Nichtlineare Optimierung	940

13.	Dynamische Optimierung	948
14.	Graphentheorie	953
15.	Wahrscheinlichkeitsrechnung	956
Literaturverzeichnis		979
Sachwortverzeichnis		985