
Technische Mechanik

Eine Einführung

von

Eberhard Brömmundt, Gottfried Sachs
und Delf Sachau

4., verbesserte und erweiterte Auflage

Oldenbourg Verlag München Wien

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V	
1	Statik des starren Körpers	1
	Grundüberlegungen zu Kräften und Gleichgewicht	1
1.1	Allgemeine Überlegungen	1
1.1.1	Kraft, Schnittprinzip	1
1.1.2	Schnittbilder	1
1.1.3	Einteilung und Benennung von Kräften	3
1.1.4	Angriffspunkt, Wirkungslinie	4
1.1.5	Zusammenfassung: Kraft	5
1.1.6	Dimension, Einheit	5
1.2	Zur Vektorrechnung	5
1.2.1	Operationen	6
1.2.2	Betrag, Einheitsvektor	7
1.2.3	Schreibweise mit Einheitsvektor und Maßzahl	8
1.3	Axiome der Statik	9
1.3.1	Zur Ausdrucksweise der Statik	10
1.3.2	Grund-Gesetze und Axiome	11
1.3.3	Die zehn Axiome der elementaren Statik	11
1.4	Kräfte und Gleichgewicht an einem Punkt in vektoriell-zeichnerischer Behandlung	15
1.4.1	Resultierende mehrerer Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt	16
1.4.2	Gleichgewicht am Punkt	16
1.4.3	Anwendungsbeispiel und Vorgehensweise	17
1.5	Kräfte und Gleichgewicht an einem Punkt in vektoriell-rechnerischer ...	18
1.5.1	Komponenten einer Kraft in einem kartesischen Koordinatensystem	18
1.5.2	Resultierende mehrerer Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt	21
1.5.3	Gleichgewicht am Punkt	22
1.5.4	Vorgehensweise bei einer Gleichgewichtsuntersuchung; Beispiel	22
	Zusammenfassen und Vereinfachen von Kräftesystemen	23
1.6	Die Resultierende eines ebenen Kräftesystems	23
1.6.1	Allgemeine Lage der Kräfte	23
1.6.2	Zusammenfassen paralleler Kräfte	25
1.6.3	Sonderfall gleich großer, antiparalleler Kräfte	25
1.7	Kräftepaar und Moment	26

1.7.1	Grundüberlegungen zum Kräftepaar	26
1.7.2	Moment	29
1.7.3	Moment einer Einzelkraft bezogen auf einen vorgegebenen Punkt	31
1.8	Das Arbeiten mit Momenten	32
1.8.1	Resultierendes Moment, Momentengleichgewicht	32
1.8.2	Der Momentensatz für das ebene Kräftesystem	33
1.8.3	Anwendungsbeispiele für den ebenen Fall	34
1.9	Räumliche Kräftesysteme	35
1.9.1	Vektorform des Moments, Moment um einen Punkt	35
1.9.2	Zusammenfassen eines räumlichen Kräftesystems	36
	Statisches Gleichgewicht von Körpern	38
1.10	Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper	38
1.10.1	Gleichgewichtsbedingungen bei einem ebenen Kräftesystem	38
1.10.2	Das Arbeiten mit den Gleichgewichtsbedingungen	41
1.10.3	Gleichgewichtsbedingungen im Raum	44
1.11	Koordinaten und Bindungen	47
1.11.1	Der Freiheitsgrad	47
1.11.2	Bindungen	50
1.11.3	Statisch bestimmte Lagerung starrer Körper	52
1.11.4	Statisch unbestimmte Systeme	53
1.12	Beispiele zur Bestimmung von Lagerkräften	55
1.12.1	Kragträger	55
1.12.2	Mit Stäben gestütztes System	56
1.12.3	Räumliches System	57
1.13	Mehrteilige Körper (Systeme) in der Ebene	59
1.13.1	Abzählen der Unbekannten und der Gleichungen	59
1.13.2	Beispiel „Gerberträger“	60
1.13.3	Schnitte an einem Gelenk mit Last	61
1.14	Stabwerke	62
1.14.1	Berechnen der Stabkräfte	63
1.14.2	Berechnen der Stabkräfte einfacher Fachwerke	64
1.14.3	Der Rittersche Schnitt	65
1.15	Überlagerung von Lösungen (Superposition)	66
1.15.1	Aufgabenstellung	66
1.15.2	Beispiel Dreigelenkbogen	67
	Schwerpunkt und Massenmittelpunkt	69
1.16	Definitionen und Erklärungen	69
1.16.1	Schwerefeld	69
1.16.2	Dichte, spezifisches Gewicht	70
1.16.3	Statische Momente, Schwerpunkt, Massenmittelpunkt	73
1.17	Praktische Schwerpunktbestimmung	77
1.17.1	Körper mit Symmetrieebenen oder Symmetrieachsen	77
1.17.2	Mittellinien	77

1.17.3	Schwerpunktbestimmung durch Zerlegung	77
1.17.4	Schwerpunktbestimmung durch Integration	79
	Innere Kräfte und Momente bei Balken	80
1.18	Normalkraft, Querkraft, Biegemoment bei Balken	80
1.18.1	Grundgedanke: Aufschneiden des Balkens	80
1.18.2	Bestimmen der Schnittgrößen	82
1.18.3	Streckenlasten (kontinuierlich verteilte Lasten)	85
1.18.4	Schnittgrößen bei Streckenlasten	86
1.18.5	Differentialbeziehungen zwischen Streckenlasten, Querkräften und Biegemomenten	88
	Haftung und Reibung	91
1.19	Vorgänge bei Haftung und Reibung	91
1.20	Haftung	92
1.20.1	Beispiel einer Haftungsaufgabe	92
1.20.2	Die Coulombsche Haftungsbedingung	93
1.20.3	Haftung bei starren, statisch unbestimmten Systemen	96
1.21	Reibung	96
1.21.1	Das Coulombsche Reibungsgesetz	96
1.21.2	Beispiele	98
1.22	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	100
1.22.1	Definition der Arbeit	101
1.22.2	Virtuelle Verrückungen	102
1.22.3	Virtuelle Arbeit	104
1.22.4	Ablesen der virtuellen Verrückungen aus einem Lageplan	105
2	Elastostatik	107
	Spannungen und Verzerrungen	107
2.1	Spannungen	107
2.1.1	Normal- und Tangentialspannungen	107
2.1.2	Abhängigkeit der Spannungen von der Schnittrichtung	109
2.1.3	Zweiachsiges Spannungszustand	110
2.1.4	Dreiachsiges Spannungszustand	114
2.2	Verzerrungen	119
2.2.1	Dehnung und Querkontraktion	119
2.2.2	Schubverformung	121
2.2.3	Kleine Verzerrungen in der Ebene	121
2.2.4	Kleine Verzerrungen im Raum	124
2.3	Stoff-Gesetze	125
2.3.1	Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm	125
2.3.2	Das Hookesche Gesetz für die einfache Zugspannung	126
2.3.3	Das Hookesche Gesetz für den zweiachsigem Spannungszustand	127
2.3.4	Das Hookesche Gesetz für Schubverformungen	128
2.3.5	Verzerrungen beim allgemeinen ebenen Spannungszustand	129

2.3.6	Verzerrungen beim allgemeinen räumlichen Spannungszustand	130
	Stabwerke und Federverbände	130
2.4	Verformung von Stabwerken	130
2.4.1	Verformung eines Einzelstabes	131
2.4.2	Verformung eines Stabwerkes	132
2.5	Statisch unbestimmte Stabwerke	134
2.5.1	Aufgabenstellung und Lösungsschema	134
2.5.2	Lösung für das Beispiel	135
2.6	Federverbände	136
2.6.1	Federn als elastische Elemente	136
2.6.2	Federschaltungen	137
2.6.3	Beispiele	139
2.7	Wärmedehnungen und Wärmespannungen	142
2.7.1	Wärmedehnungen	142
2.7.2	Wärmespannungen	143
	Biegung von Balken mit symmetrischen Querschnitten	145
2.8	Gleichungen der Balkenbiegung	145
2.8.1	Aufgabenstellung	145
2.8.2	Verformung des Balkenelementes	146
2.8.3	Spannungen	148
2.8.4	Gleichgewichtsbeziehungen	148
2.9	Flächenmomente zweiten Grades	151
2.9.1	Allgemeine Definitionen und Beziehungen	151
2.9.2	Flächenmomente zweiten Grades für einige Querschnitte	152
2.9.3	Verschieben und Drehen des Bezugssystems; Hauptachsen	153
2.9.4	Zusammengesetzte Querschnitte	157
2.10	Biegespannungen	160
2.10.1	Spannungen bei reiner Biegung	160
2.10.2	Überlagerung von Normalkraft- und Biegespannungen	161
2.10.3	Spannungen bei schiefer Biegung	162
2.11	Biegelinien von Balken	165
2.11.1	Differentialgleichung der Biegelinie	165
2.11.2	Allgemeine Bemerkungen zur Integration (Lösung) der Differentialgleichung der Biegelinie	167
2.11.3	Anwendungsbeispiele	168
2.11.4	Allgemeinere Randbedingungen	169
2.11.5	Aneinanderstückeln von Biegelinien	171
2.11.6	Überlagerung (Superposition) von Lösungen	172
2.11.7	Biegedifferentialgleichung vierter Ordnung	174
2.11.8	Schiefe Biegung	175
2.12	Statisch unbestimmt gelagerte Balken	176
2.12.1	Lösung durch Integration der Biegedifferentialgleichung	176
2.12.2	Lösung durch Superposition (Beispiel)	178

2.12.3	Statisch unbestimmtes System mit elastischer Lagerung (Beispiel)	179
	Torsion von Stäben	181
2.13	Stäbe mit Kreis- oder Kreisringquerschnitt	181
2.13.1	Allgemeine Überlegungen	181
2.13.2	Herleitung der Gleichungen	181
2.13.3	Drehwinkel	184
2.13.4	Beispiele	185
	Arbeitsaussagen der Elastostatik	187
2.14	Energieüberlegungen	188
2.14.1	Arbeit der äußeren Kräfte und Momente	188
2.14.2	Arbeit der inneren Kräfte und Momente	190
2.14.3	Die Sätze von Castigliano	192
2.15	Das Prinzip der virtuellen Kräfte	196
2.15.1	Allgemeine Bezeichnungen	196
2.15.2	Virtuelle Kräfte	197
2.15.3	Vorgehen bei der Berechnung von Auslenkungen	199
2.15.4	Anwendungsbeispiele	200
	Stabilität	204
2.16	Einführende Überlegungen zur Stabilität	204
2.17	Statische Stabilität eines Feder-Stab-Systems	205
2.17.1	Stabilitätsuntersuchung	205
2.17.2	Zwei allgemeine Schlüsse aus dem Beispiel	207
2.18	Knicken von Druckstäben	208
2.18.1	Differentialgleichung der Biegelinie des axial gedrückten Stabes	208
2.18.2	Der unten eingespannte, oben freie Knickstab	210
3	Kinematik und Kinetik	213
	Kinematik eines Punktes	213
3.1	Ort, Bewegung, Koordinaten	213
3.1.1	Ort, Bewegung	213
3.1.2	Kartesische Koordinaten	215
3.1.3	Polar- und Zylinderkoordinaten	215
3.1.4	Koordinatendrehung	217
3.1.5	Spezielle Bewegungen	220
3.2	Geschwindigkeit	221
3.2.1	Geschwindigkeit längs Bahn (z. B. Gerade, Kreis)	221
3.2.2	Winkelgeschwindigkeit	224
3.2.3	Geschwindigkeitsvektor	224
3.2.4	Geschwindigkeitsvektor in kartesischen Koordinaten	225
3.2.5	Geschwindigkeitsvektor in Zylinderkoordinaten	226
3.3	Beschleunigung	228
3.3.1	Beschleunigung längs Bahn (z. B. Gerade, Kreis)	229

3.3.2	Winkelbeschleunigung	229
3.3.3	Beschleunigungsvektor	230
3.3.4	Beschleunigungsvektor in kartesischen Koordinaten	230
3.3.5	Beschleunigungsvektor in Zylinderkoordinaten	231
3.3.6	Berechnen der Beschleunigung aus wegabhängig vorgegebener Geschwindigkeit	233
3.4	Berechnung von Geschwindigkeit und Weg aus vorgegebener Beschleunigung	233
3.4.1	Beschleunigung $a(t)$ gegeben, $v(t)$ und $s(t)$ gesucht	234
3.4.2	Beschleunigung $a(s)$ gegeben, $v(t)$ und $s(t)$ gesucht	236
3.4.3	Kinematik harmonischer Schwingungen	237
	Kinetik des Massenpunktes	241
3.5	Der freie Fall und die kinetischen Grundgleichungen	241
3.5.1	Der freie Fall	241
3.5.2	Die kinetischen Grundgesetze nach Newton	241
3.5.3	Maßsysteme	243
3.5.4	Koordinatenschreibweise des Newtonschen Gesetzes	243
3.5.5	Anwendungsbeispiele für das Newtonsche Gesetz	244
3.5.6	Krummlinige Bewegung eines Massenpunktes im Raum unter konstanter Kraft	247
	Prinzip von d'Alembert. Reine Translation und reine Rotation eines starren Körpers	249
3.6	Das Prinzip von d'Alembert	249
3.6.1	Allgemeine Überlegungen	249
3.6.2	Ausdeutung des Ergebnisses	250
3.7	Translationsbewegungen eines starren Körpers	250
3.7.1	Kinematik der Translation	250
3.7.2	Kinetik der Translation	251
3.8	Rotationsbewegung eines starren Körpers	253
3.8.1	Kinematik der Rotation	253
3.8.2	Kinetik der Rotation	254
3.8.3	Trägheitsmomente homogener zylindrischer Körper	256
3.8.4	Prinzip von d'Alembert für Drehbewegungen	258
3.8.5	Beispiele	258
	Arbeit und Leistung, Energiesatz	263
3.9	Arbeit und Leistung, Potential	263
3.9.1	Arbeit	263
3.9.2	Leistung	264
3.9.3	Potential	266
3.10	Die Kinetische Energie	270
3.10.1	Kinetische Energie des Massenpunktes	270
3.10.2	Kinetische Energie bei Drehung um eine feste Achse	272
3.11	Der Energiesatz	272

3.11.1	Erste Form des Energiesatzes (allgemeine Form)	273
3.11.2	Zweite Form des Energiesatzes (gilt nur für konservative Systeme)	274
3.11.3	Dritte Form des Energiesatzes (gilt für beliebige Systeme)	275
3.11.4	Der Energiesatz für zusammengesetzte Systeme; Beispiel	278
3.11.5	Das Aufstellen von Bewegungsgleichungen für Systeme mit einem Freiheitsgrad über den Energiesatz	279
	Impulssatz und Drallsatz für den Massenpunkt	280
3.12	Der Impulssatz	280
3.12.1	Herleitung	280
3.12.2	Veranschaulichung des Impulssatzes im eindimensionalen Fall	282
3.12.3	Plastischer Stoß	283
3.12.4	Elastischer Stoß	284
3.12.5	Hinweis auf reale Stöße; Stoßzahl	285
3.13	Der Drallsatz (Drehimpuls-Satz)	286
3.13.1	Herleitung	286
3.13.2	Beispiel	287
3.13.3	Der Flächensatz (2. Keplersches Gesetz)	288
	Kinetik des Punkthaufens	289
3.14	Annahmen, Schwerpunktsatz, Impulssatz	289
3.14.1	Annahmen	289
3.14.2	Schwerpunktsatz	290
3.14.3	Impulssatz	291
3.15	Der Drallsatz (Drehimpuls-Satz) für den Punkthaufen	293
3.15.1	Drallsatz bezogen auf einen festen Punkt	293
3.15.2	Drallsatz bezogen auf den Schwerpunkt	295
3.16	Kinematik des parallel zu einer Ebene bewegten starren Körpers	296
3.16.1	Referenzkoordinaten, Lagekoordinaten	296
3.16.2	Geschwindigkeit	298
3.16.3	Beschleunigung	299
3.17	Kinetik des parallel zu einer Ebene bewegten starren Körpers	300
3.17.1	Schwerpunktbewegung (Translation)	300
3.17.2	Drehung um den Schwerpunkt (Rotation)	301
3.18	Bewegung in der Ebene: Zusammenfassung und Beispiele	303
3.18.1	Zusammenfassung	303
3.18.2	Beispiele	304
3.18.3	Die Dralländerung tangential zur Ebene; Deviationsmomente	307
3.19	Der Energiesatz bei ebenen Bewegungen	309
3.19.1	Potentielle Energie des Gewichts	309
3.19.2	Kinetische Energie des starren Körpers in der Ebene	310
3.19.3	Beispiel für den Energiesatz	310
3.20	Vermischte Aufgaben und Probleme	311
3.20.1	Innere Kräfte infolge Bewegung	311
3.20.2	Drall- und Kreiseleffekte	313

3.20.3	Kreisel	314
3.21	Freie Schwingungen	316
3.21.1	Feder-Masse-Schwinger ohne Gewicht	316
3.21.2	Feder-Masse-Schwinger mit Gewicht	317
3.21.3	Mathematisches Pendel	319
3.21.4	Drehschwinger	320
3.22	Freie gedämpfte Schwingungen	321
3.22.1	Dämpferelement	321
3.22.2	Bewegungsgleichung des linear gedämpften Schwingers	322
3.22.3	Lösen der Bewegungsgleichung mit dem $e^{\lambda t}$ -Ansatz	323
3.22.4	Aperiodische Bewegungen	326
3.23	Erzwungene gedämpfte Schwingungen	327
3.23.1	Bewegungsgleichung eines Fußpunktterregten Schwingers	327
3.23.2	Superposition (Überlagerung) von Lösungen	328
3.23.3	Komplexe Behandlung der erzwungenen Schwingungen	329
3.23.4	Einschwingvorgang	334
3.24	Freie ungedämpfte Schwingungen mit dem Freiheitsgrad zwei	335
3.24.1	Bewegungsgleichungen für einen ungedämpften Schwinger vom Freiheitsgrad zwei	335
3.24.2	Lösen der Bewegungsgleichung mit dem $e^{\lambda t}$ -Ansatz	338
3.24.3	Ausdeuten der Lösung; Eigenschwingungen; Umformen der Lösung; Anpassen an Anfangsbedingungen	341
3.25	Erzwungene ungedämpfte Schwingungen mit dem Freiheitsgrad zwei ..	345
3.25.1	Bewegungsgleichungen	345
3.25.2	Superposition (Überlagerung) von Lösungen	346
3.25.3	Berechnen der erzwungenen Schwingungen	347
	Personenverzeichnis	353
	Index	354