

**REPETITORIUM
DER
HÖHEREN MATHEMATIK**

**Gerhard Merziger
Thomas Wirth**

Inhaltsverzeichnis

F1 Formelsammlung	0
--------------------------	----------

F2 Formelsammlung	1
--------------------------	----------

Alphabete	11
------------------	-----------

Zeichenindex	12
---------------------	-----------

1 Grundbegriffe	14
------------------------	-----------

1.1 Logische Grundlagen, Aussagen	14
1.2 Mathematische Grundlagen, Mengen	17
1.3 Vollständige Induktion	20
1.4 Kartesische Produkte	23
1.5 Abbildungen, Funktionen	24
1.6 Umkehrfunktionen	29
1.7 Einsetzen (Verketten, Substituieren) von Funktionen	31
1.8 Gerade, ungerade Funktionen	32
1.9 Grenzwerte von Funktionen	35
1.10 Stetige Funktionen	37
1.11 Aufgaben	40
1.12 Lösungen	41

2 Reelle Zahlen	44
------------------------	-----------

2.1 Brüche, Potenzen, Wurzeln	44
2.2 Fakultät, Binomialkoeffizienten	45
2.3 Ungleichungen, Beträge	47
2.4 Aufgaben	54
2.5 Lösungen	55

3 Elementare Funktionen	59
--------------------------------	-----------

3.1 Polynome, ganze rationale Funktionen	59
3.1.1 Grundsätzlicher Verlauf, Verhalten im Unendlichen	59
3.1.2 Nullstellen, Linearfaktoren	60
3.1.3 Zerlegung reeller Polynome	62
3.1.4 Polynome 2-ten Grades, quadratische Gleichungen	64
3.1.5 Interpolation	65
3.1.6 HORNER-Schema	66
3.2 Rationale Funktionen	67
3.3 Trigonometrische Funktionen	75
3.4 Inverse trigonometrische Funktionen	77
3.5 Schwingungen	78
3.6 Schwingungen, komplexe Rechnung	81
3.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen	85
3.8 Hyperbelfunktionen	88
3.9 Inverse Hyperbelfunktionen, Area-Funktionen	89
3.10 Potenzfunktionen	91
3.11 Aufgaben	91
3.12 Lösungen	91

4 Komplexe Zahlen	93
4.1 Zahlenebene	93
4.2 Betrag, Abstand, Einheitskreis	97
4.3 Konjugiert komplexe Zahl	98
4.4 Multiplikation und Division, Potenzen	99
4.5 Wurzeln aus komplexen Zahlen, Formel von Moivre	103
4.6 Quadratische Gleichungen	108
4.7 Die komplexe Exponentialfunktion	111
4.8 Die komplexe Logarithmusfunktion	113
4.9 Aufgaben	114
4.10 Lösungen	116
5 Vektorrechnung	120
5.1 Rechnen mit Vektoren	120
5.2 Vektoren in Koordinatendarstellung	121
5.3 Linear abhängig, linear unabhängig, lineare Hülle	123
5.4 Skalarprodukt	127
5.5 Vektorprodukt	133
5.6 Spatprodukt	136
5.7 Geraden im Raum	137
5.8 Ebenen im Raum	145
5.9 Vektorielle Beweise	155
5.10 Aufgaben	159
5.11 Lösungen	162
6 Matrizen	166
6.1 Bezeichnungen	166
6.2 Rechnen mit Matrizen	167
6.3 Rang einer Matrix	170
6.4 Quadratische Matrizen	172
6.5 Inverse Matrix	175
6.6 Matrizen und Basen	178
6.7 Orthogonale Matrizen, kartesische Basen	180
6.8 Koordinatenvektoren	181
7 Determinanten	183
7.1 Entwicklung nach Zeilen und Spalten	183
7.2 Elementare Umformungen	186
7.3 Flächenberechnung, Orientierung	187
7.4 Cramersche Regel	188

8 Lineare Abbildungen und Matrizen	189
8.1 Lineare Abbildungen und Matrizen	189
8.2 Abbildungsmatrix $M_B^A(\varphi)$	194
8.3 Abbildungsmatrix $M_B^A(\text{id})$	198
8.4 Nacheinanderausführen linearer Abbildungen, $M_C^A(\psi \circ \varphi)$	199
8.5 Abbildungsmatrix bei spezieller Basis $M_A^A(\varphi)$	201
8.6 Drehungen und Drehmatrizen	205
9 Eigenwerte, Eigenvektoren	209
9.1 Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume	209
9.2 Diagonalisierung, symmetrische Matrizen	215
10 Hauptachsentransformation	219
10.1 Kegelschnitte, Kurven zweiter Ordnung	219
10.2 Quadriken, Flächen zweiter Ordnung	224
10.3 Kurven/Flächen zweiter Ordnung in allgemeiner Lage	227
10.4 Klassifizierung, Kurven/Flächen zweiter Ordnung	240
10.5 Aufgaben	241
10.6 Lösungen	241
11 Lineare Gleichungssysteme	244
11.1 Gaußsches Eliminationsverfahren	245
11.2 Lineare Gleichungssysteme mit Parameter	253
11.3 Aufgaben	256
11.4 Lösungen	257
12 Differentialrechnung	260
12.1 Differenzierbarkeit	260
12.2 Rechnen mit differenzierbaren Funktionen	264
12.3 Höhere Ableitungen	266
12.4 Implizites Differenzieren	267
12.5 Extremwerte von Funktionen einer Veränderlichen	268
12.6 Grenzwertbestimmung, unbestimmte Ausdrücke	272
12.7 Näherungsweise Nullstellenbestimmung	278
12.8 Aufgaben	279
12.9 Lösungen	281

13 Integralrechnung	285
13.1 Das unbestimmte Integral	285
13.1.1 Rechnen mit unbestimmten Integralen	285
13.1.2 Integration durch Substitution	286
13.1.3 Partielle Integration	288
13.1.4 Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung)	289
13.1.5 Integration einiger nicht rationaler Funktionen	292
13.2 Das bestimmte Integral	300
13.2.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	301
13.2.2 Integration durch Substitution, partielle Integration	303
13.2.3 Flächenberechnung	305
13.2.4 Das bestimmte Integral als Funktion seiner oberen Grenze	308
13.3 Uneigentliche Integrale	311
13.4 Aufgaben	319
13.5 Lösungen	321
14 Folgen und Reihen	328
14.1 Zahlenfolgen	328
14.2 Numerische Reihen	335
14.3 Potenzreihen	344
14.4 Taylorreihen	354
14.5 Fourierreihen	360
14.6 Aufgaben	365
14.7 Lösungen	367
15 Funktionen mehrerer Veränderlicher	369
15.1 Flächen im Raum, Niveaulinien, Blockbild	369
15.2 Stetigkeit	370
15.3 Differenzierbarkeit	373
15.3.1 Partielle Ableitungen, Gradient	373
15.3.2 Differenzierbarkeit, Ableitung (Gradient, Jacobi-Matrix)	375
15.3.3 Kettenregel	380
15.3.4 Tangentialebene, totales Differential	383
15.4 Richtungsableitung	385
15.5 Partielle Ableitungen höherer Ordnung	388
15.6 Implizite Funktionen	389
15.6.1 Explizite, implizite Funktionen, lokale Auflösung	389
15.6.2 Ableitung impliziter Funktionen	390
15.7 Taylorentwicklung von $w=f(x,y)$	395
15.8 Extremwerte einer Funktion mehrerer Veränderlicher	399
15.9 Extremwerte unter Nebenbedingungen	406
15.10 Differentiation und Integration	410
15.11 Aufgaben	413
15.12 Lösungen	415

16 Differentialgleichungen	418
16.1 Explizite DGL 1. Ordnung	418
16.2 DGL mit getrennten Variablen	426
16.3 Lineare DGL 1.Ordnung	431
16.4 Elementar integrierbare implizite DGLn 1.Ordnung	435
16.5 Einige spezielle DGLn 2.Ordnung	437
16.6 Lineare DGL n-ter Ordnung	439
16.6.1 Homogene lineare DGL n-ter Ordnung	440
16.6.2 Inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung	444
16.7 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten	448
16.8 Schwingungs-DGL	454
16.9 Eulersche DGL	457
16.10Potenzreihenansatz	458
16.11DGL-Systeme	461
16.12Lineare Systeme	462
16.13Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	469
16.13.1Homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	469
16.13.2Inhomogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	476
16.14Eliminationsmethode für lineare DGL-Systeme	478
16.15Aufgaben	481
16.16Lösungen	482
17 Mehrfache Integrale	485
17.1 Doppelintegrale	485
17.2 Dreifache Integrale	490
17.3 Aufgaben	496
17.4 Lösungen	498
18 Vektoranalysis	499
18.1 Kurven in der Ebene	499
18.2 Kurven im Raum	506
18.3 Flächen im Raum	511
18.4 Skalar- und Vektorfelder	522
18.4.1 Differentialoperatoren: Gradient, Divergenz, Rotation, Nabla	523
18.4.2 Felddarstellungen in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten	529
18.5 Kurvenintegrale, Linienintegrale	537
18.6 Oberflächenintegrale	544
18.7 Integralsätze der Vektoranalysis	548
18.8 Aufgaben	554
18.9 Lösungen	555
Index	557
F3 Formelsammlung	568
F4 Formelsammlung	569