

# Inhaltsverzeichnis

<b>I.</b>	<b>Kapitel</b>	<b>Der Matrizenkalkül</b>	<b>1</b>
1	Grundbegriffe und einfache Rechenregeln		1
1.1	Lineare Transformation, Matrix und Vektor		1
1.2	Zeilen- und Spaltenvektoren		5
1.3	Einfache Rechenregeln		7
1.4	Transponierte Matrix, symmetrische und schiefsymmetrische Matrix		9
1.5	Diagonalmatrix, Skalarmatrix und Einheitsmatrix		11
1.6	Lineare Abhängigkeit, Rang, singuläre Matrix, Determinante		12
2	Das Matrizenprodukt		15
2.1	Einführung des Matrizenproduktes		15
2.2	Sätze über Matrizenmultiplikation		20
2.3	Diagonal- und Dreiecksmatrix		24
2.4	Skalares Produkt, Betrag und Winkel reeller Vektoren		26
2.5	Dyadisches Produkt		28
2.6	Potenzen und Polynome		30
2.7	Die Gaußsche Transformation		31
2.8	Orthogonale Matrizen		33
3	Die Kehrmatrix (Inverse)		35
3.1	Begriff und Herleitung der Kehrmatrix		35
3.2	Adjungierte Matrix. Formelmäßiger Ausdruck der $\alpha_{ik}$		39
3.3	Matrizendivision		42
4	Komplexe Matrizen		43
4.1	Komplexe Matrizen und Vektoren		43
4.2	Sonderformen komplexer Matrizen		45
4.3	Reelle Darstellung komplexer Matrizen		48
4.4	Inverse, Adjungierte und Determinante einer hermiteschen Matrix		49

<b>II.</b>	<b>Kapitel Transformationen und lineare Gleichungen</b>	<b>52</b>
5	Freie Transformationen	52
5.1	Ein- und beidseitige Transformationen	52
5.2	Reguläre Transformationen	56
5.3	Die drei Grundoperationen	56
5.4	Das Generalschema einer Äquivalenztransformation	63
5.5	Das Pivotkreuz	65
5.6	Die Normalform einer Matrix	66
5.7	Das vollständige System von Elevatoren	66
5.8	Potenzen und Polynome	71
5.9	Der Vertauschungssatz	73
5.10	Lineare Abbildungen	74
6	Die Algorithmen von Gauß, Banachiewicz und Gauß-Jordan	75
6.1	Zielsetzung	75
6.2	Das Nullenkreuz	76
6.3	Der Gaußsche Algorithmus in expliziter Durchführung	76
6.4	Der Gaußsche Algorithmus in impliziter Durchführung	78
6.5	Der Algorithmus von Banachiewicz	79
6.6	Der Algorithmus von Gauß-Jordan	82
6.7	Hermiteische (reelsymmetrische) Matrix	84
6.8	Rechenaufwand	85
6.9	Pivotregulierung	86
6.10	Pivotregulierung bei hermitescher Matrix	87
6.11	Bewegliches Pivot	91
6.12	Reelle ganzzahlige Äquivalenztransformationen	93
6.13	Der verkürzte Euklidische Algorithmus	98
6.14	Reelle ganzzahlige Kongruenztransformationen	101
6.15	Komplexe ganzzahlige Transformationen	102
6.16	Die Normalform	104
6.17	Dreieckszerlegung einer quadratischen Matrix	105
6.18	Eigenzeilen und Eigenspalten einer singulären Matrix	107
6.19	Die normierte Eigendyade als Projektor	111
6.20	Schlußbemerkung	114
7	Auflösung linearer Gleichungssysteme	115
7.1	Aufgabenstellung	115
7.2	Drei Kardinalforderungen	116
7.3	Der Algorithmus von Gauß	118
7.4	Der Algorithmus von Banachiewicz	122
7.5	Der Algorithmus von Gauß-Jordan	123
7.6	Reguläre quadratische Matrix. Determinante, Inverse und Adjungierte	124
7.7	Pivotregulierung. Wiederholung der Rechnung	126
7.8	Homogene Gleichungssysteme	128

7.9	Hermiteische (reellsymmetrische) Matrix .....	130
7.10	Allgemeine inhomogene Gleichungssysteme .....	132
7.11	Ganzzahlige Gleichungssysteme .....	140
7.12	Zusammenfassung .....	142
8	Orthogonalsysteme .....	144
8.1	Die Normalform eines Matrizenproduktes .....	144
8.2	Biorthonormalsysteme .....	146
8.3	Das vervollständigte Matrizenprodukt .....	148
8.4	Kongruenztransformation. Orthogonalsysteme .....	151
8.5	Eine Variante .....	155
8.6	Überbestimmte Gleichungssysteme. Kondensation. Die Pseudoinverse .....	156
9	Lineare Abhängigkeit und Rang .....	159
9.1	Die Pivotmatrix .....	159
9.2	Die Basis .....	160
9.3	Dyadische Zerlegung .....	161
9.4	Der dominierende Minor .....	162
9.5	Lineare Abhängigkeit von Vektoren und Matrizen .....	163
9.6	Der Rang eines Matrizenproduktes .....	164
10	Gebundene Transformationen .....	167
10.1	Die simultane Äquivalenztransformation .....	167
10.2	Die dyadische Zerlegung eines Matrizenpaares .....	170
10.3	Die Spektralzerlegung eines Matrizenpaares .....	173
10.4	Normale Matrizenpaare .....	175
10.5	Potenzen und Polynome .....	177
10.6	Die Produktzerlegung einer diagonalähnlichen Matrix .....	181
10.7	Normalformen von Matrizenpaaren .....	182
10.8	Die strikte Ähnlichkeitstransformation. Die drei Grundoperationen .....	184
10.9	Die gequantelte Ähnlichkeitstransformation .....	188
10.10	Die Ähnlichkeitstransformation auf die Begleitmatrix .....	192
10.11	Normiert-unitäre Transformationen. Unitäre Ergänzung .....	196
10.12	Nicht-normiert unitäre Transformationen .....	201
10.13	Unitäre Transformation auf obere Hessenberg-Matrix .....	204
10.14	Ganzzahlige Ähnlichkeitstransformation auf obere Hessenberg- Matrix .....	208
10.15	Lineare Abbildungen .....	212
10.16	Zusammenfassung. Ausblick .....	215

<b>III. Kapitel Quadratische Formen nebst Anwendungen</b>	<b>218</b>
11 Quadratische Formen	219
11.1 Darstellung quadratischer und bilinearer Formen	219
11.2 Definite quadratische Formen	222
11.3 Indefinite quadratische Formen	224
11.4 Transformation quadratischer Formen. Invarianten	227
11.5 Hermitesche Formen	230
11.6 Flächen zweiten Grades	231
12 Einige Anwendungen quadratischer Formen	234
12.1 Anwendung in der Ausgleichsrechnung	234
12.2 Vektoriell Produkt und Abstandsquadrat	238
12.3 Massen- und Flächenmoment zweiten Grades	239
12.4 Die kinetische Energie eines starren Körpers	242
12.5 Die potentielle Energie einer elastischen Feder	243
<b>IV. Kapitel Die Eigenwertaufgabe</b>	<b>245</b>
13 Eigenwerte und Eigenvektoren	246
13.1 Das allgemeine einparametrische Eigenwertproblem	246
13.2 Reguläre Äquivalenztransformation. Invarianten	249
13.3 Polynommatrizen	250
13.4 Das lineare Eigenwertproblem (Matrizenpaare)	251
13.5 Orthogonalität der Links- und Rechtseigenvektoren	253
13.6 Das spezielle Eigenwertproblem	255
13.7 Die charakteristische Gleichung	257
13.8 Kondensation. Der Formenquotient	260
13.9 Die Eigenwerte eines Matrizenproduktes	261
13.10 Reelle Paare mit konjugiert-komplexen Eigenwerten	264
13.11 Der Satz von Cayleigh-Hamilton	267
14 Diagonalähnliche Matrizenpaare	269
14.1 Die Diagonalmatrix für $s = n$	269
14.2 Die Block-Diagonalmatrix für $s < n$	270
14.3 Die Spektralzerlegung eines diagonalähnlichen Paares. Eigenwerte und Eigenterme	273
14.4 Eine spezielle lineare Vektordifferentialgleichung zweiter Ordnung	276
14.5 Das Minimalpolynom	279
15 Diagonalkongruente (normale) Matrizenpaare	282
15.1 Die Normalitätseigenschaft	282
15.2 Hermitesche (reellsymmetrische) Paare	284
15.3 Schiefhermitesche (schiefsymmetrische) Matrix	286
15.4 $B$ -unitäres Matrizenpaar	286
15.5 Reelle Flächenpaare zweiten Grades. Das Hauptachsenproblem	287

15.6	Lineare Schwingungssysteme .....	292
15.7	Die hermiteschen Komponenten eines normalen Paares .....	299
15.8	Fragen der Normierung .....	301
15.9	Die singulären Werte eines allgemeinen Matrizenpaares .....	303
15.10	Die Struktur eines Matrizenpaares .....	306
16	Die Block-Diagonalmatrix. Strukturfragen .....	307
16.1	Zielsetzung .....	307
16.2	Die Transformation auf obere Dreiecksmatrix .....	311
16.3	Die Transformation auf Block-Diagonalmatrix .....	318
16.4	Die Struktur der Eigenmatrix. Natürliche Charakteristik .....	324
16.5	Die Normierung der Kodiagonale .....	327
16.6	Die Transformation auf die Strukturmatrix .....	330
16.7	Die Jordan-Matrix .....	333
16.8	Die Jordan-Spektralzerlegung .....	335
16.9	Ein Rückblick von höherer Warte .....	339
16.10	Eigen- und Hauptvektoren .....	340
16.11	Zusammenfassung. Historisches .....	346
17	Eigenwerte spezieller Matrizen .....	347
17.1	Spaltensummenkonstante und stochastische Matrizen .....	347
17.2	Schachbrettmatrizen .....	350
17.3	Zyklische Matrizen .....	354
17.4	Spezielle dreireihige Bandmatrizen .....	356
17.5	Die Matrix von Boothroyd/Dekker .....	361
18	Parametermatrizen .....	362
18.1	Problemstellung .....	362
18.2	Spektralzerlegung einer diagonalähnlichen Parametermatrix ....	362
18.3	Diagonalähnliche Matrizentupel .....	368
18.4	Selbstnormierende Tupel .....	370
18.5	Über die Eigenwerte von Matrizenprodukten .....	371
18.6	Parameternormale Matrizen .....	372
18.7	Lineare Abhängigkeit von einem Leitpaar .....	376
<b>V.</b>	<b>Kapitel Matrizengleichungen und Matrizenfunktionen .....</b>	<b>379</b>
19	Matrizengleichungen .....	379
19.1	Problemstellung .....	379
19.2	Die Matrizengleichung $AXB = C$ .....	380
19.3	Die mehrgliedrige lineare Matrizengleichung .....	384
19.4	Die zweigliedrige lineare Matrizengleichung .....	385
19.5	Elimination .....	390
19.6	Dekomposition (Entflechtung) .....	393
19.7	Rekursion .....	396
19.8	Entkopplung .....	397

19.9	Algebraisch nichtlineare Matrizengleichungen .....	398
19.10	Zusammenfassung. Ausblick .....	400
20	Matrizenfunktionen .....	401
20.1	Der Austausch von Eigenwerten. Deflation .....	401
20.2	Was ist eine Matrizenfunktion? .....	404
20.3	Die skalare Taylor-Entwicklung .....	405
20.4	Die Taylor-Entwicklung im Gesamtraum .....	407
20.5	Die Taylor-Entwicklung im Eigenraum (Hauptunterraum). Quasipolynome .....	409
20.6	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ..	414
20.7	Mehrdeutige Funktionen .....	419
<b>VI.</b>	<b>Kapitel Ergänzungen</b> .....	<b>422</b>
21	Kondensation. Der Rayleigh-Quotient und sein Wertebereich ...	423
21.1	Was ist ein Kondensat? .....	423
21.2	Der Rayleigh-Quotient eines normalen Paares. Der Wertebereich .....	423
21.3	Der Einfluß einer Störung .....	427
21.4	Der Wertebereich eines nichtnormalen Paares .....	429
21.5	Kondensation höherer Ordnung .....	434
22	Blockmatrizen .....	438
22.1	Die Matrizenmultiplikation in Blöcken .....	438
22.2	Die reduzierte Blockmatrix .....	439
22.3	Blockdreiecksmatrizen .....	444
22.4	Inverse und Adjungierte einer vierteiligen Hypermatrix .....	445
22.5	Die Identität von Frobenius/Schur/Woodbury .....	450
22.6	Abgeänderte (gestörte, benachbarte) Gleichungssysteme .....	454
22.7	Singuläre Matrizenpaare .....	457
23	Expansion von Polynomen und Polynommatrizen .....	462
23.1	Zielsetzung .....	462
23.2	Expansion von Günther .....	463
23.3	Diagonalexpansion .....	464
23.4	Wiederholte Diagonalexpansion .....	474
23.5	Diagonalexpansion mit konstanten Defekten .....	476
23.6	Diagonalexpansion mit variablen Defekten .....	481
23.7	Zusammenfassung .....	482
	<b>Schlußbemerkung</b> .....	<b>483</b>
	<b>Weiterführende Literatur</b> .....	<b>485</b>
	Lehr- und Fachbücher .....	485
	Einzelveröffentlichungen .....	487
	<b>Namen- und Sachverzeichnis</b> .....	<b>489</b>