

Inhaltsverzeichnis

Teil I Analysis und Physik

1	Die Euler'sche Reihe und trigonometrische Summen	3
1.1	Der Beweis von Reimund Albers	4
1.2	Albers' Beweis vervollständigt	7
1.3	Die Summe der Sehnenintensitäten algebraisch	10
1.4	Weitere trigonometrische Summen	12
1.5	Beweise	16
1.6	Zum Weiterdenken	17
1.7	Einsatz von Mathematica	17
2	Der Weg des Hinterrades	19
2.1	Herleitung der Differentialgleichung	20
2.2	Die gewöhnliche Traktrix	22
2.3	Beispiele für Schleppkurven	24
2.4	Schleppkurven zum Einheitskreis	25
2.4.1	Lösung der Differentialgleichung im Falle des Kreises	27
2.4.2	Periodische Schleppkurven	29
2.4.3	Die periodischen Schleppkurven sind algebraisch	30
2.4.4	Der Sonderfall $L = \pm 1$	34
2.5	Schleppkurven zur Logarithmusfunktion	36
2.6	Schleppkurven zur Parabel	36
2.6.1	Ein hübscher Sonderfall	37
2.6.2	Eine algebraische Schleppkurve	39
2.6.3	Scharen von algebraischen Schleppkurven	40
2.7	Zum Weiterdenken	41
3	Variationen mit Spiralfedern	43
3.1	Die hängende Spiralfeder	44
3.2	Die hängende Spiralfeder in Schwingung	46
3.2.1	Randbedingungen	47
3.2.2	Diskretisierung	50
3.3	Besonderheiten bei Eigenwerten und -vektoren	53

3.4	Die Spiralfeder als Kettenlinie	54
3.4.1	Lösungen der DGL.	57
3.4.2	Die Bedeutung von b	60
3.5	Zum Weiterdenken	61
4	Origami auf krummen Wegen	63
4.1	Die Achsen der Zylinder stehen senkrecht aufeinander	64
4.1.1	Wertebereiche	65
4.1.2	Beispiele	66
4.2	Die Achsen stehen nicht senkrecht aufeinander	67
4.3	Zum Weiterdenken	69
4.4	Eine kleine Galerie	69
5	Das Zwillingsparadoxon mit beschleunigten Bewegungen	73
5.1	Das klassische Zwillingsparadoxon	74
5.2	Beschleunigte Bewegungen	77
5.3	Zwillingsparadoxon bei vorgegebener Reisegeschwindigkeit	80
5.4	Zum Weiterdenken	82
6	Die aufgehängte Erde	85
6.1	Näherungslösungen	86
6.2	Nebenlösungen	88
6.2.1	Eine einfache Näherung	88
6.2.2	Eine Reihenentwicklung	89
6.3	Zum Weiterdenken	91
6.4	Einsatz von Mathematica	91
7	Der Sieg der Wurzel über den Logarithmus	93
7.1	Wann gibt es Schnittpunkte von $\ln x$ und x^e ?	95
7.2	Die Lambert'sche W-Funktion	95
7.3	Die kleinen Lösungen von $\ln x = x^e$	97
7.4	Die großen Lösungen von $\ln x = \sqrt[a]{x}$	98
7.5	Die Gleichung $e^x = x^a$	100
7.6	Zum Weiterdenken	101

Teil II Geometrie

8	Fast perfekte Spiralen aus Kreisbögen	105
8.1	Spiralen in einer Folge von Quadraten	106
8.2	Spiralen in einer Folge von gleichseitigen Dreiecken	110
8.3	Sonderfälle	112
8.4	Spiralen auf dem DIN-A4-Blatt	113
8.5	Beinahe exakte Spiralen nach Fibonacci und Padovan	114
8.5.1	Die Fibonaccispiralen	115
8.5.2	Das Zentrum der Fibonaccispiralen	116
8.5.3	Die Padovanspirale	118
8.5.4	Das Zentrum der Padovanspirale	120

8.6	Zum Weiterdenken	121
8.7	Einsatz von Mathematica	122
9	Euklid in der nicht-euklidischen Welt.	125
9.1	Sphäre und Pseudosphäre	127
9.1.1	Raumflächen und nicht-euklidische Geometrie	128
9.1.2	Die Boy'sche Fläche	130
9.2	Karten.	130
9.2.1	Karten der elliptischen Geometrie	132
9.2.2	Karten der hyperbolischen Geometrie	135
9.3	Was sieht Euklid im nicht-euklidischen Raum?	139
9.3.1	Wie sieht der hyperbolische Raum aus?	140
9.3.2	Wie sieht eine Gerade im hyperbolischen Raum aus?	141
9.4	Wie sieht der elliptische Raum aus?	142
9.5	Fotos aus der hyperbolischen Welt.	142
9.5.1	Koordinatensysteme.	143
9.5.2	Erste Objekte	144
9.5.3	Straßen und Siedlungen	146
9.6	Fotos aus der elliptischen Welt.	149
9.7	Zwei Fragen zum Abschluss	151
9.8	Zum Weiterdenken.	154
10	Die Hopf-Faserung in Formeln und Bildern	155
10.1	Mannigfaltigkeiten und Faserungen.	156
10.1.1	Mannigfaltigkeiten	156
10.1.2	Faserbündel	158
10.1.3	Faserbündel mit Sphären	159
10.2	Stereografische Projektionen von S^2 und S^3	160
10.3	Die Hopf-Faserung.	162
10.4	Formeln zur Hopf-Faserung	165
10.4.1	Die Fasern sind Großkreise in S^3	167
10.4.2	Bilder der Fasern unter der stereografischen Projektion.	167
10.5	Zum Weiterdenken.	169
11	Sehnen im Kreis mit ganzen Zahlen	171
11.1	Drei Sehnen	173
11.2	Parametrisierte Lösungen für drei Sehnen	174
11.3	Vier ganzzahlige Sehnen im Halbkreis	177
11.3.1	Eine Sehne ist dreifach vorhanden.	179
11.3.2	Eine Sehne ist doppelt vorhanden	179
11.3.3	Vier verschiedene Sehnen	179
11.4	Noch mehr Sehnen.	180
11.5	Das Gauß'sche Kreisproblem	181
11.6	Zum Weiterdenken.	183

Teil III Algebra und Kombinatorik

12 Die Irrfahrt des Betrunkenen von Laterne zu Laterne	187
12.1 Eine erste heuristische Abschätzung	188
12.2 Irrfahrten gezählt mit Rekursionen	188
12.2.1 Nicht-negative Pfade	189
12.2.2 Positive Pfade mit Rückkehr zur Null	193
12.2.3 Positive Pfade ohne Rückkehr zur Null	194
12.2.4 Pfade mit vorgeschriebener Anzahl an Nullstellen	195
12.3 Erwartungswert für die Anzahl der Nullstellen	201
12.4 Zum Weiterdenken	202
12.5 Einsatz von Mathematica	203
13 Arnolds Katze kehrt zurück.	205
13.1 Die stetige Transformation.	206
13.2 Die diskrete Transformation	207
13.3 Verallgemeinerung auf andere Abbildungen	212
13.3.1 In der Literatur behandelte Fälle	213
13.3.2 Ein eigener Beitrag.	214
13.4 Die Transformation auf rechteckigen Bildern	215
13.4.1 Perioden für rechteckige Bilder	219
13.4.2 Verallgemeinerung auf andere Abbildungen	222
13.5 Zum Weiterspielen	224
13.6 Einsatz von Mathematica	224
14 Der Feynman-Punkt und was dahintersteckt.	227
14.1 Bitfolgen und Läufe von Nullen	228
14.1.1 Lösung der Rekursion	229
14.1.2 Eine einfachere Rekursion	231
14.2 Mehr Ziffern als nur 0 und 1 und Läufe von Nullen	232
14.2.1 Lösung der Rekursion	233
14.3 Bitfolgen und Läufe von Nullen oder Einsen	234
14.4 Mehr Ziffern als nur 0 und 1 und Läufe beliebiger Ziffern	235
14.5 Rekursion für das Auftreten eines festen Ziffernmusters.	236
14.5.1 Das Ziffernmuster kann sich nicht überschneiden.	237
14.5.2 Das Muster kann sich überschneiden.	239
14.5.3 Muster mit Perioden.	240
14.6 Geschlossene Formeln	241
14.7 Zum Weiterdenken	243
14.8 Einsatz von Mathematica	244
15 Die Goodstein-Folge	245
15.1 Die ersten Folgen $G(1)$, $G(2)$ und $G(3)$	247
15.2 Die Folge $G(4)$	248
15.3 Die Folge $G(5)$	253
15.4 Nachtrag	257
15.5 Einsatz von Mathematica	258
15.6 Zum Weiterdenken	260

16	Überraschend reduzible Polynome	261
16.1	Überraschend reduzible Polynome, geordnet nach Grad	263
16.2	Systematische Fälle	267
16.2.1	Polynomscharen mit $x^2 + 2x + 2$ als Faktor	267
16.2.2	Polynomscharen mit $x^2 + 2x + 4$ als Faktor	268
16.2.3	Polynomscharen mit $x^2 + 3x + 3$ als Faktor	268
16.3	Der Fall $x^n + x^m + 1$ allgemein	269
16.4	Zum Weiterdenken	271
17	Hamiltonpfade im Sudoku	273
17.1	Kleine Sudokus	274
17.2	$3 \times 3 \times 3$ -Sudoku	275
17.3	$4 \times 4 \times 4$ -Sudoku	276
17.4	Zum Weiterspielen	277
17.5	Einsatz von Mathematica	278
18	Futurama und das Theorem aus der Fernsehserie	283
18.1	Die Aufgabenstellung	285
18.2	Das Theorem: Wie man Körper geschickt permutiert	286
18.3	Vorbereitungen	287
18.4	Beweis von Satz 18.2	288
18.5	Anwendung auf Futurama-Episode 98	289
18.6	Zum Weiterdenken	289
A	Ergänzungen zu ausgewählten Kapiteln	291
B	Zur Syntax von Mathematica	309
C	Lineare Rekursionen	319
Literatur		323
Sachverzeichnis		327