

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Funktionen</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 Grundbegriffe . . . . .                                      | 2         |
| 1.2 Umkehrfunktion, Verkettung . . . . .                         | 11        |
| 1.3 Bivariate Funktionen . . . . .                               | 15        |
| 1.4 Multivariate Funktionen . . . . .                            | 18        |
| 1.5 Weitere Eigenschaften multivariater Funktionen . . . . .     | 20        |
| 1.6 Ordnungen und Äquivalenzrelationen . . . . .                 | 22        |
| Selbsttest . . . . .   | 29        |
| Aufgaben . . . . .   | 30        |
| <b>2 Matrizen und Vektoren</b>                                   | <b>33</b> |
| 2.1 Matrizen . . . . .   | 34        |
| 2.2 Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen . . . . .     | 37        |
| 2.3 Multiplikation von Matrizen . . . . .                        | 41        |
| 2.4 Inverse Matrizen . . . . .                                   | 44        |
| 2.5 Lineare Abbildungen . . . . .                                | 46        |
| 2.6 Geometrie des $\mathbb{R}^n$ . . . . .                       | 49        |
| 2.7 Weitere Eigenschaften von Mengen im $\mathbb{R}^n$ . . . . . | 54        |
| 2.8 Orthogonale Matrizen und Abbildungen . . . . .               | 57        |
| Selbsttest . . . . .   | 61        |
| Aufgaben . . . . .   | 62        |
| <b>3 Folgen und Reihen</b>                                       | <b>65</b> |
| 3.1 Zahlenfolgen . . . . .                                       | 67        |
| 3.2 Mehrdimensionale Folgen . . . . .                            | 75        |
| 3.3 Weitere Eigenschaften von Folgen . . . . .                   | 77        |
| 3.4 Reihen . . . . .   | 78        |
| 3.5 Geometrische Reihe . . . . .                                 | 80        |
| 3.6 Anwendung: Finanzmathematik . . . . .                        | 81        |
| 3.7 Konvergenzkriterien für Reihen . . . . .                     | 86        |
| 3.8 Stetigkeit von Funktionen . . . . .                          | 90        |
| 3.9 Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .          | 95        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.10     | Fixpunkte einer Funktion . . . . .                                       | 98         |
| 3.11     | Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .              | 101        |
|          | Selbsttest . . . . .   | 105        |
|          | Aufgaben . . . . .   | 106        |
| <b>4</b> | <b>Differenzierbare Funktionen einer Variablen</b>                       | <b>109</b> |
| 4.1      | Ableitung, Differential, Elastizität . . . . .                           | 110        |
| 4.2      | Ableitungsregeln . . . . .   | 117        |
| 4.3      | Erste und zweite Ableitung . . . . .                                     | 120        |
| 4.4      | Nullstellen und Extrema . . . . .  | 123        |
| 4.5      | Wendepunkte . . . . .  | 127        |
| 4.6      | Monotonie, Konkavität, Konvexität . . . . .                              | 130        |
| 4.7      | Höhere Ableitungen und Taylor-Polynom . . . . .                          | 132        |
| 4.8      | Regel von L'Hospital . . . . .   | 135        |
| 4.9      | Mittelwertsatz . . . . .   | 137        |
| 4.10     | Numerische Verfahren zur Nullstellenbestimmung . . . . .                 | 138        |
|          | Selbsttest . . . . .   | 148        |
|          | Aufgaben . . . . .   | 149        |
| <b>5</b> | <b>Differenzierbare Funktionen mehrerer Variablen</b>                    | <b>153</b> |
| 5.1      | Ableitung, Differential, Elastizitäten . . . . .                         | 154        |
| 5.2      | Ableitungsregeln . . . . .   | 161        |
| 5.3      | Ableitung vektorwertiger Funktionen . . . . .                            | 163        |
| 5.4      | Kettenregel und totale Ableitung . . . . .                               | 167        |
| 5.5      | Homogenität . . . . .  | 169        |
| 5.6      | Implizite Funktionen . . . . .   | 174        |
| 5.7      | Richtungsableitung . . . . .   | 181        |
| 5.8      | Lokale lineare Approximation . . . . .                                   | 183        |
|          | Selbsttest . . . . .   | 186        |
|          | Aufgaben . . . . .   | 188        |
| <b>6</b> | <b>Optimierung von Funktionen mehrerer Variablen</b>                     | <b>193</b> |
| 6.1      | Extrema im Innern des Definitionsbereichs . . . . .                      | 194        |
| 6.2      | Extrema am Rand des Definitionsbereichs . . . . .                        | 199        |
| 6.3      | Globale Extrema . . . . .  | 200        |
| 6.4      | Extrema unter Nebenbedingungen . . . . .                                 | 204        |
| 6.5      | Enveloppentheorem . . . . .  | 213        |
| 6.6      | Hinreichende Bedingungen für Extrema unter<br>Nebenbedingungen . . . . . | 216        |
| 6.7      | Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen . . . . .                                 | 220        |
| 6.8      | Taylor-Polynom . . . . .   | 230        |
|          | Selbsttest . . . . .   | 232        |
|          | Aufgaben . . . . .   | 234        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| <b>7</b>  | <b>Integralrechnung</b>                                | <b>237</b> |
| 7.1       | Stammfunktionen . . . . .                              | 238        |
| 7.2       | Unbestimmte Integrale . . . . .                        | 243        |
| 7.3       | Bestimmte Integrale . . . . .                          | 245        |
| 7.4       | Weitere Rechenregeln für bestimmte Integrale . . . . . | 247        |
| 7.5       | Berechnung von Flächen . . . . .                       | 248        |
| 7.6       | Partielle Integration . . . . .                        | 253        |
| 7.7       | Integration durch Substitution . . . . .               | 255        |
| 7.8       | Uneigentliche Integrale . . . . .                      | 257        |
| 7.9       | Integralrechnung in mehreren Variablen . . . . .       | 262        |
| 7.10      | Ableitung unter dem Integral . . . . .                 | 269        |
|           | Selbsttest . . . . .                                   | 270        |
|           | Aufgaben . . . . .                                     | 272        |
| <b>8</b>  | <b>Lineare Gleichungen</b>                             | <b>275</b> |
| 8.1       | Lösung einer linearen Gleichung . . . . .              | 275        |
| 8.2       | Elementare Zeilenumformungen . . . . .                 | 276        |
| 8.3       | Das Gauß-Jordan-Verfahren . . . . .                    | 277        |
| 8.4       | Inversion einer Matrix . . . . .                       | 285        |
|           | Selbsttest . . . . .                                   | 288        |
|           | Aufgaben . . . . .                                     | 289        |
| <b>9</b>  | <b>Grundbegriffe der linearen Algebra</b>              | <b>291</b> |
| 9.1       | Linearkombinationen und Erzeugnis . . . . .            | 291        |
| 9.2       | Lineare Unterräume . . . . .                           | 294        |
| 9.3       | Lineare Unabhängigkeit . . . . .                       | 295        |
| 9.4       | Basis und Dimension . . . . .                          | 297        |
| 9.5       | Rang einer Matrix . . . . .                            | 300        |
| 9.6       | Mehr über lineare Gleichungen . . . . .                | 303        |
| 9.7       | Vektorräume . . . . .                                  | 307        |
|           | Selbsttest . . . . .                                   | 310        |
|           | Aufgaben . . . . .                                     | 311        |
| <b>10</b> | <b>Determinanten und Eigenwerte von Matrizen</b>       | <b>313</b> |
| 10.1      | Determinanten . . . . .                                | 313        |
| 10.2      | Eigenwerte . . . . .                                   | 320        |
| 10.3      | Eigenwerte von symmetrischen Matrizen . . . . .        | 327        |
|           | Selbsttest . . . . .                                   | 332        |
|           | Aufgaben . . . . .                                     | 334        |
| <b>11</b> | <b>Lineare Optimierung</b>                             | <b>337</b> |
| 11.1      | Grafische Lösung . . . . .                             | 340        |
| 11.2      | Das Simplexverfahren . . . . .                         | 341        |
| 11.3      | Die Mathematik des Simplexverfahrens . . . . .         | 344        |

|  |            |
|--|------------|
| 11.4 Das Simplexverfahren in Tableauform . . . . .                     | 350        |
| 11.5 Die Zweiphasenmethode zur Gewinnung einer Anfangslösung . . . . . | 357        |
| 11.6 Dualität . . . . .  | 363        |
| Selbsttest . . . . .   | 373        |
| Aufgaben . . . . .   | 374        |
| <b>12 Differential- und Differenzengleichungen</b>                     | <b>377</b> |
| 12.1 Differentialgleichungen . . . . .                                 | 378        |
| 12.2 Differenzengleichungen . . . . .                                  | 391        |
| Selbsttest . . . . .   | 417        |
| Aufgaben . . . . .   | 418        |
| <b>A Das griechische Alphabet</b>                                      | <b>421</b> |
| <b>B Mengen</b>  | <b>423</b> |
| <b>C Summen und Produkte</b>   | <b>429</b> |
| <b>D Komplexe Zahlen</b>   | <b>435</b> |
| <b>E Kurzlösungen zu den Selbsttests</b>                               | <b>443</b> |
| <b>F Kurzlösungen zu den Aufgaben</b>                                  | <b>447</b> |
| <b>Ausgewählte Lehrbücher</b>  | <b>469</b> |
| <b>Index</b>   | <b>471</b> |