

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

v

1	Komplexe Zahlen und ihre geometrische Darstellung	1
1.1	Von den natürlichen Zahlen zu den komplexen Zahlen	1
1.2	Die komplexen Zahlen	6
1.3	Rechnen im Körper ($\mathbb{C}, +, \cdot$)	10
	Aufgaben	11
1.4	Die Gaußsche Zahlenebene.....	12
1.5	Die Betragsfunktion in \mathbb{C}	12
1.6	Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene.....	15
	Aufgaben	22
1.7	Polarkoordinatendarstellung	23
1.8	Die Formeln von Moivre und Euler	26
1.9	Anwendungen in der Physik: Bewegungen eines Punktes in der Ebene ..	31
1.10	Spiralen	37
1.11	Komplexe Zahlen und Fraktale	41
	Aufgaben	46
2	Primzahlen im Komplexen	49
2.1	Die Menge der ganzen Gaußschen Zahlen	49
2.2	Norm und Einheiten.....	50
2.3	Die Gaußschen Primzahlen	51
2.4	Division mit Rest im Ring der ganzen Gaußschen Zahlen	54
2.5	Primfaktorzerlegung in \mathbb{G}	56
	Aufgaben	57

3	Lösungen algebraischer Gleichungen	59
3.1	Quadratwurzeln und quadratische Gleichungen	59
3.2	Allgemeine Wurzeln	64
3.3	Einheitswurzeln: n -te Wurzeln aus der Zahl 1	66
	Aufgaben	70
3.4	Kubische Gleichungen	72
3.5	Ausblick	84
3.6	Lösungen der Gleichung 4. Grades	85
	Aufgaben	87
4	Fundamentalsatz der Algebra	89
4.1	Die Problemstellung	89
4.2	Der Fundamentalsatz der Algebra	90
4.3	Die Bedeutung des Fundamentalsatzes	97
	Aufgaben	100
5	Riemannsche Kugel	101
5.1	Einleitung	101
5.2	Stereografische Projektion	102
5.3	Eigenschaften der stereografischen Projektion	103
5.4	Darstellung einer Funktion auf der Riemannschen Zahlenkugel – ein Beispiel	108
	Aufgaben	108
6	Komplexe Funktionen	111
6.1	Begriffsbildung	111
6.2	Differenzieren von komplexen Funktionen	113
6.3	Konforme Abbildungen	116
	Aufgaben	120
7	Gebrochen lineare Funktionen	121
7.1	Ganze lineare Funktionen	122
7.2	Die Inversion	125
7.3	Spiegelung am Kreis und hyperbolische Fraktal-Ornamente	131

7.4	Kurvenverwandtschaft bei der Inversion $y = 1/z$	133
7.5	Gebrochen lineare Funktionen: Möbiustransformationen	136
7.6	Das Doppelverhältnis	143
7.7	Normalform der Möbiustransformation mit zwei Fixpunkten	144
7.8	Möbius-Transformationen auf der Riemannschen Kugel.....	148
	Aufgaben	150
8	Die Jukowski-Funktion und die Funktion $w = z^2$	153
9	Komplexe Zahlen und Konforme Abbildungen mit MAPLE	159
	Lösungen zu den Aufgaben	169
	Literatur	179
	Index	181