

Auf einen Blick

Einführung.....	19
Teil I: Analysis – ein Überblick	25
Kapitel 1: Was ist Analysis?.....	27
Kapitel 2: Die beiden wichtigen Konzepte der Analysis: Differenziation und Integration.....	33
Kapitel 3: Warum die Analysis funktioniert.....	39
Teil II: Die Voraussetzungen für die Analysis.....	45
Kapitel 4: Überblick über Vor-Algebra und Algebra.....	47
Kapitel 5: Verrückte Funktionen und ihre wunderbaren Graphen.....	63
Kapitel 6: Trigonometrie ist Trumpf!.....	81
Teil III: Grenzwerte.....	85
Kapitel 7: Grenzwerte und Stetigkeit.....	87
Kapitel 8: Grenzwerte auswerten	97
Teil IV: Differenziation	107
Kapitel 9: Differenziation – Orientierung.....	109
Kapitel 10: Regeln für die Differenziation – was sein muss, muss sein!.....	127
Kapitel 11: Differenziation und die Form von Kurven.....	137
Kapitel 12: Wunschlos glücklich: Der Differenziation sei Dank!	157
Teil V: Integration.....	177
Kapitel 13: Integration und Flächenannäherung – ein Einstieg	179
Kapitel 14: Integration: Differenziation rückwärts	195
Kapitel 15: Integrationstechniken für Profis.....	219
Kapitel 16: Grau ist alle Theorie: Mit Integralen echte Probleme lösen.....	233
Teil VI: Der Top-Ten-Teil.....	253
Kapitel 17: Zehn Dinge, die Sie sich merken sollten.....	255
Kapitel 18: Zehn Dinge, die Sie vergessen können.....	257
Anhang: Lösungen.....	259
Abbildungsverzeichnis.....	279
Stichwortverzeichnis.....	283

Inhaltsverzeichnis

Einführung	19
Über dieses Buch.....	19
Konventionen in diesem Buch.....	20
Was Sie nicht lesen müssen.....	20
Törichte Annahmen über die Leser.....	20
Wie dieses Buch aufgebaut ist.....	21
Teil I: Analysis – ein Überblick	21
Teil II: Die Voraussetzungen für die Analysis	21
Teil III: Grenzwerte	21
Teil IV: Differenziation	22
Teil V: Integration.....	22
Teil VI: Der Top-Ten-Teil	22
Symbole, die in diesem Buch verwendet werden.....	22
Wie es weitergeht.....	23
TEIL I	
ANALYSIS – EIN ÜBERBLICK	25
Kapitel 1	
Was ist Analysis?	27
Was Analysis nicht ist.....	27
Was also ist Analysis?	28
Beispiele aus der Praxis.....	30
Aufgaben.....	31
Kapitel 2	
Die beiden wichtigen Konzepte der Analysis:	
Differenziation und Integration	33
Differenziation – Definition.....	33
Die Ableitung ist eine Steigung	33
Die Ableitung ist eine Änderungsrate	35
Und jetzt zur Integration.....	36
Aufgaben.....	38
Kapitel 3	
Warum die Analysis funktioniert	39
Das Grenzwertkonzept: Ein mathematisches Mikroskop	39
Was passiert beim Vergrößern?.....	40

12 Inhaltsverzeichnis

Zwei Warnungen – nur zur Vorsicht	43
Ich könnte meine Lizenz verlieren, Mathematik zub betreiben	43
Und was um alles in der Welt bedeutet »unendlich« überhaupt?.....	43
Aufgaben.....	44
TEIL II	
DIE VORAUSSETZUNGEN FÜR DIE ANALYSIS	45
Kapitel 4	
Überblick über Vor-Algebra und Algebra	47
Was Sie über Brüche wissen sollten.....	47
Ein paar schnelle Regeln.....	48
Brüche multiplizieren.....	48
Brüche dividieren.....	49
Brüche addieren	49
Brüche subtrahieren.....	51
Brüche kürzen	51
Betrag – absolut einfach.....	53
Potenzen machen stark.....	53
Zu den Wurzeln...	55
Wurzeln, Wurzeln überall!.....	55
Logarithmen... wirklich keine Hexerei.....	56
Faktorisieren – das wollte ich schon immer!	57
Den größten gemeinsamen Teiler herausziehen	57
Quadratische Gleichungen lösen	58
Methode 1: Faktorisieren.....	58
Methode 2: Die abc-Formel	59
Methode 3: Quadratische Ergänzung.....	60
Aufgaben.....	61
Kapitel 5	
Verrückte Funktionen und ihre wunderbaren Graphen.....	63
Was ist eine Funktion?.....	63
Die definierende Eigenschaft einer Funktion	64
Unabhängige und abhängige Variablen	65
Funktionsnotation.....	65
Zusammengesetzte Funktionen.....	66
Wie sieht eine Funktion aus?.....	67
Allgemeine Funktionen und ihre Graphen	68
Geradeheraus – Geraden in der Ebene.....	68

Parabel- und Betragsfunktionen – gerade heraus	72
Einige ungerade Funktionen	73
Exponentialfunktionen	73
Logarithmische Funktionen.....	74
Inverse Funktionen	74
Schieben, spiegeln, dehnen, stauchen.....	76
Horizontale Transformationen.....	76
Vertikale Transformationen.....	78
Aufgaben.....	78
Kapitel 6	
Trigonometrie ist Trumpf!.....	81
Trigonometrie im Crashkurs.....	81
Sinus, Kosinus und Tangens zeichnen	82
Inverse trigonometrische Funktionen	83
Aufgaben.....	84
TEIL III	
GRENZWERTE.....	85
Kapitel 7	
Grenzwerte und Stetigkeit	87
Bis an die Grenzen.....	87
Drei Funktionen erklären den Grenzwert.....	88
Jetzt wird es etwas einseitig.....	90
Die formale Definition eines Grenzwerts – wie erwartet!....	91
Unendliche Grenzwerte und vertikale Asymptoten.....	91
Grenzwerte am Rand der Unendlichkeit – haben	
Sie gute Schuhe an?.....	92
Grenzwerte und Stetigkeit verknüpfen	93
Stetigkeit und Grenzwerte gehen normalerweise	
Hand in Hand	94
Die Ausnahme für ein Loch bringt die Wahrheit	
ans Licht	94
Die Mathematik der Stetigkeit.....	95
Aufgaben.....	96
Kapitel 8	
Grenzwerte auswerten	97
Einfache Grenzwerte	97
Grenzwerte, die Sie sich merken sollten.....	97
Einsetzen und Ausköchen	98
Die »echten« Aufgabenstellungen mit Grenzwert.....	98

14 Inhaltsverzeichnis

Einen Grenzwert mit dem Taschenrechner bestimmen.....	99
Aufgabenstellungen mit Grenzwert algebraisch lösen.....	100
Faktorisieren aus Leidenschaft.....	100
Grenzwerte bei unendlich auswerten.....	102
Grenzwerte bei unendlich und horizontale Asymptoten.....	103
Algebra für Grenzwerte bei unendlich verwenden.....	104
Aufgaben.....	105
TEIL IV	
DIFFERENZIATION.....	107
Kapitel 9	
Differenziation – Orientierung.....	109
Differenziation: Sucht die Steigung!	109
Die Steigung einer Geraden.....	111
Die Ableitung einer Geraden	113
Die Ableitung: Einfach eine Änderungsrate.....	113
Geschwindigkeit – die uns vertrauteste Änderungsrate.....	113
Die Beziehung zwischen Änderungsrate und Steigung	114
Die Ableitung einer Kurve.....	115
Der Differenzenquotient.....	117
Durchschnittliche Änderungsrate und momentane Änderungsrate	123
Sein oder nicht sein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert.....	124
Aufgaben.....	125
Kapitel 10	
Regeln für die Differenziation – was sein muss, muss sein!.....	127
Grundlegende Regeln der Differenziation.....	127
Die Konstantenregel.....	128
Die Potenzregel.....	128
Die Regeln zu dem Vielfachen von Konstanten.....	129
Die Summenregel – die kennen Sie schon.....	130
Die Differenzregel – macht kaum einen Unterschied.....	130
Trigonometrische Funktionen differenzieren.....	130
Exponentielle und logarithmische Funktionen differenzieren.....	130
Differenzierungsregeln für Profis – Wir sind die Champs!.....	132
Die Produktregel.....	132
Die Quotientenregel.....	132
Die Kettenregel: implizite Differenziation.....	133
Aufgaben.....	136

Kapitel 11**Differenziation und die Form von Kurven 137**

Ein Ausflug mit der Analysisgruppe.....	137
Über Berge und durch Täler: Positive und negative	
Steigungen.....	137
Krümmung und Wendepunkte	138
Das Tal der Tränen: Ein lokales Minimum	139
Ein atemberaubender Ausblick: Das absolute	
Maximum.....	139
Autopanne: Auf dem Scheitelpunkt hängen geblieben.....	139
Von nun an ging's bergab!.....	140
Ihr Reisetagebuch	140
Lokale Extremwerte finden.....	141
Die kritischen Werte herausleidern	141
Der Test der ersten Ableitung.....	142
Der Test der zweiten Ableitung – Testen, bis	
die Ärztin kommt	144
Absolute Extremwerte für ein abgeschlossenes Intervall	
finden	145
Die absoluten Extremwerte über den gesamten	
Definitionsbereich einer Funktion finden.....	147
Krümmung und Wendepunkte bestimmen.....	149
Die Graphen von Ableitungen – Bildschön!.....	152
Aufgaben.....	155

Kapitel 12**Wunschlos glücklich: Der Differenziation****sei Dank! 157**

Wie Sie das Beste aus Ihrem Leben machen:	
Optimierungsprobleme.....	157
Das maximale Volumen einer Schachtel.....	158
Husch, husch: Position, Geschwindigkeit und	
Beschleunigung.....	160
Maximale und minimale Höhe.....	161
Geschwindigkeit und Abstand	163
Gesamte zurückgelegte Distanz.....	164
Gummigeruch und Bremsstreifen: Beschleunigung	
und Abbremsen.....	165
Und jetzt alles zusammen	165
(Relativ) verkettete Änderungsraten.....	166
Einen Trog auffüllen	166
Tangenten und Normalen: Auf die Spitze getrieben	169

16 Inhaltsverzeichnis

Die Aufgabenstellung mit der Tangente	170
Das Normallinienproblem.....	171
Aufgaben.....	174
TEIL V	
INTEGRATION	177
Kapitel 13	
Integration und Flächenannäherung – ein Einstieg.....	179
Die Fläche unter einer Kurve bestimmen.....	179
Der Umgang mit negativen Flächen.....	181
Flächen annähern.....	182
Flächen mithilfe linker Summen annähern.....	182
Flächen mithilfe rechter Summen annähern	184
Die Summennotation.....	186
Die Grundlagen summieren	186
Riemann-Summen in Sigma-Notation.....	187
Exakte Flächen mithilfe des bestimmten Integrals ermitteln.....	190
Aufgaben.....	193
Kapitel 14	
Integration: Differenziation rückwärts	195
Stammfunktionen suchen – die umgekehrte Differenziation	195
Wenn es ganz genau zugehen soll.....	197
Die müßige Flächenfunktion	197
Ruhm und Ehre mit dem Hauptsatz der Analysis.....	199
Der Hauptsatz der Analysis: Teil 2.....	204
Warum der Hauptsatz funktioniert: Die Verbindung zwischen Integration und Differenziation	205
Stammfunktionen finden: Drei grundlegende Techniken.....	209
Umkehrregeln für Stammfunktionen.....	209
Umkehrregeln für Denkschwäche	209
Die etwas schwierigere umgekehrte Potenzregel.....	210
Raten und Prüfen.....	211
Die Substitutionsmethode	213
Flächen mithilfe von Substitutionsaufgaben bestimmen.....	214
Aufgaben	216
Kapitel 15	
Integrationstechniken für Profis	219
Partielle (teilweise) Integration: Teile und Herrsche!.....	219
Das u auswählen	222

Partielle Integration: Beim zweiten wie beim ersten Mal	223
A, B und C in Partialbrüchen (Teilbrüchen).....	225
1. Fall: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren.....	226
2. Fall: Der Nenner enthält nicht zu kürzende quadratische Faktoren.....	227
Bonustrack: Koeffizienten ähnlicher Terme gleichsetzen.....	229
Aufgaben.....	230
Kapitel 16	
Grau ist alle Theorie: Mit Integralen echte Probleme lösen	233
Der Mittelwertsatz für Integrale und der Durchschnittswert.....	234
Die Fläche zwischen zwei Kurven – der doppelte Spaß.....	237
Das Volumen eines unregelmäßigen Körpers.....	241
Die Pfannkuchenstapelmethode.....	241
Die Stapel-Donuts-auf-die-sich-jemand-gesetzt- hat-Methode	242
Bogenlängen bestimmen.....	244
Die Regel von L'Hôpital: Analysis nicht nur im Krankenhaus.....	246
Uneigentliche Integrale: Am Verlauf zu erkennen	248
Uneigentliche Integrale mit vertikalen Asymptoten.....	248
Eine vertikale Asymptote an einer der Integrationsgrenzen	248
Uneigentliche Integrale mit einer oder zwei unendlichen Integrationsgrenzen.....	250
Aufgaben.....	252
TEIL VI	
DER TOP-TEN-TEIL	253
Kapitel 17	
Zehn Dinge, die Sie sich merken sollten	255
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	255
$\frac{0}{5} = 0$, aber $\frac{5}{0}$ ist undefiniert. Und $\frac{0}{0}$ erst recht!.....	255
Irgendetwas ⁰ = 1	255
SghCahTga	256
Trigonometrische Werte für 30-, 45- und 60-Grad-Winkel	256
$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	256
Die Produktregel	256
Die Quotientenregel	256
$\frac{d}{dx} e^x = e^x$; $\int e^x dx = e^x + C$	256
Wo Sie Ihre Schlüssel hingelegt haben	256

Kapitel 18	
Zehn Dinge, die Sie vergessen können.....	257
$(a+b)^2 = a^2 + b^2$ – Falsch!	257
$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ – Falsch!	257
Die Steigung ist $\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$ – Falsch!	257
$\frac{3a+b}{3a+c} = \frac{b}{c}$ – Falsch!	257
$\frac{d}{dx} \pi^3 = 3\pi^2$ – Falsch!	258
Wenn k eine Konstante ist, dann ist $\frac{d}{dx} kx = k'x + kx'$ – Falsch!	258
Quotientenregel: $\frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{v'u - vu'}{v^2}$ – Falsch!	258
$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$ – Falsch!	258
$\int (\sin x)dx = \cos x + C$ – Falsch!	258
Den Satz von Green. Schon richtig, aber	258
Anhang: Lösungen.....	259
Kapitel 1	259
Kapitel 2	259
Kapitel 3	260
Kapitel 4	262
Kapitel 5	263
Kapitel 6	264
Kapitel 7	264
Kapitel 8	265
Kapitel 9	266
Kapitel 10	267
Kapitel 11	268
Kapitel 12	269
Kapitel 13	270
Kapitel 14	272
Kapitel 15	273
Kapitel 16	275
Abbildungsverzeichnis.....	279
Stichwortverzeichnis.....	283