

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b> | <b>Funktionentheorie</b>                                | <b>13</b> |
| <b>1</b> | <b>Komplexwertige Funktionen</b>                        | <b>15</b> |
|          | Einblick . . . . .                                      | 15        |
|          | Holomorphie . . . . .                                   | 15        |
|          | Cauchy-Riemann'sche Differenzialgleichungen . . . . .   | 16        |
|          | Wichtige Eigenschaften holomorpher Funktionen . . . . . | 19        |
|          | Potenzreihen über $\mathbb{C}$ . . . . .                | 21        |
|          | Ausblick . . . . .                                      | 30        |
|          | Selbsttest . . . . .                                    | 32        |
| <b>2</b> | <b>Integration komplexwertiger Funktionen</b>           | <b>33</b> |
|          | Einblick . . . . .                                      | 33        |
|          | Kurvenintegrale . . . . .                               | 33        |
|          | Integralsatz von Cauchy I . . . . .                     | 37        |
|          | Integralsatz von Cauchy II . . . . .                    | 39        |
|          | Cauchy'sche Integralformel . . . . .                    | 43        |
|          | Ausblick . . . . .                                      | 44        |
|          | Selbsttest . . . . .                                    | 46        |
| <b>3</b> | <b>Analytische Funktionen</b>                           | <b>47</b> |
|          | Einblick . . . . .                                      | 47        |
|          | Entwicklung komplexer Funktionen . . . . .              | 47        |
|          | Punktweise und gleichmäßige Konvergenz . . . . .        | 48        |
|          | Potenzreihenentwicklungssatz . . . . .                  | 51        |
|          | Ausblick . . . . .                                      | 51        |
|          | Selbsttest . . . . .                                    | 52        |
| <b>4</b> | <b>Mehr über komplexwertige Funktionen</b>              | <b>53</b> |
|          | Einblick . . . . .                                      | 53        |
|          | Wegunabhängigkeit komplexer Kurvenintegrale . . . . .   | 53        |
|          | Isolierte Singularitäten . . . . .                      | 54        |
|          | Klassifikation isolierter Singularitäten . . . . .      | 55        |
|          | Laurent-Reihen . . . . .                                | 55        |
|          | Berechnung von Laurent-Reihen . . . . .                 | 57        |

|                                                             |                |
|-------------------------------------------------------------|----------------|
| Residuen . . . . .                                          | 58             |
| Einfach-zusammenhängende Mengen . . . . .                   | 59             |
| Residuensatz . . . . .                                      | 62             |
| Ausblick . . . . .                                          | 64             |
| Selbsttest . . . . .                                        | 65             |
| <b>Aufgaben zur Funktionentheorie</b>                       | <b>67</b>      |
| <br><b>II Topologie und Analysis auf Mannigfaltigkeiten</b> | <br><b>69</b>  |
| <br><b>5 Topologische Räume</b>                             | <br><b>71</b>  |
| Einblick . . . . .                                          | 71             |
| Grundlagen . . . . .                                        | 71             |
| Basen und Umgebungen . . . . .                              | 73             |
| Stetige Abbildungen . . . . .                               | 75             |
| Homöomorphismen und Unterräume . . . . .                    | 78             |
| Kompakte Räume . . . . .                                    | 82             |
| Zusammenhängende Räume . . . . .                            | 85             |
| Trennungseigenschaften . . . . .                            | 86             |
| Ausblick . . . . .                                          | 89             |
| Selbsttest . . . . .                                        | 90             |
| <br><b>6 Mannigfaltigkeiten</b>                             | <br><b>91</b>  |
| Einblick . . . . .                                          | 91             |
| Abzählbare und überabzählbare Mengen . . . . .              | 91             |
| Topologische Mannigfaltigkeiten . . . . .                   | 93             |
| Karten und Atlanten . . . . .                               | 95             |
| Verträglichkeit von Karten und Atlanten . . . . .           | 96             |
| Äquivalenzrelationen und -klassen . . . . .                 | 97             |
| Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .               | 100            |
| Diffeomorphismen . . . . .                                  | 101            |
| Ausblick . . . . .                                          | 102            |
| Selbsttest . . . . .                                        | 104            |
| <br><b>7 Tangential-, Dual- und Tensorräume</b>             | <br><b>105</b> |
| Einblick . . . . .                                          | 105            |
| Tangentialräume . . . . .                                   | 105            |
| Koordinatenbasen . . . . .                                  | 107            |
| Dualräume . . . . .                                         | 111            |
| Tensorräume . . . . .                                       | 113            |
| Ausblick . . . . .                                          | 115            |
| Selbsttest . . . . .                                        | 116            |

|            |                                                                  |            |
|------------|------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>8</b>   | <b>Vektorfelder, 1-Formen und Tensorfelder</b>                   | <b>117</b> |
|            | Einblick . . . . .                                               | 117        |
|            | Vektorfelder . . . . .                                           | 117        |
|            | 1-Formen . . . . .                                               | 118        |
|            | Koordinatendarstellung . . . . .                                 | 119        |
|            | Tensorfelder . . . . .                                           | 124        |
|            | Ausblick . . . . .                                               | 125        |
|            | Selbsttest . . . . .                                             | 126        |
|            | <b>Aufgaben zu Topologie und Analysis auf Mannigfaltigkeiten</b> | <b>127</b> |
| <b>III</b> | <b>Funktionalanalysis</b>                                        | <b>129</b> |
| <b>9</b>   | <b>Laplace-Transformation</b>                                    | <b>131</b> |
|            | Einblick . . . . .                                               | 131        |
|            | Laplace-Transformation . . . . .                                 | 132        |
|            | Lösen von Anfangswertproblemen . . . . .                         | 134        |
|            | Ausblick . . . . .                                               | 135        |
|            | Selbsttest . . . . .                                             | 136        |
| <b>10</b>  | <b>Fourier-Transformation</b>                                    | <b>137</b> |
|            | Einblick . . . . .                                               | 137        |
|            | Rechenregeln und Inverse . . . . .                               | 139        |
|            | Faltung . . . . .                                                | 144        |
|            | Faltungssatz . . . . .                                           | 146        |
|            | Diskrete Fourier-Transformation . . . . .                        | 149        |
|            | Ausblick . . . . .                                               | 150        |
|            | Selbsttest . . . . .                                             | 151        |
| <b>11</b>  | <b>Banach- und Hilbert-Räume</b>                                 | <b>153</b> |
|            | Einblick . . . . .                                               | 153        |
|            | Grundlagen . . . . .                                             | 153        |
|            | Hilbert-Raum $\ell^2$ der quadratsummierbaren Folgen . . . . .   | 159        |
|            | Orthonormalsysteme . . . . .                                     | 161        |
|            | Operatoren . . . . .                                             | 170        |
|            | Ausblick . . . . .                                               | 172        |
|            | Selbsttest . . . . .                                             | 174        |
|            | <b>Aufgaben zur Funktionalanalysis</b>                           | <b>175</b> |
|            | <b>Lösungen der Selbsttests</b>                                  | <b>177</b> |

|                                                         |            |
|---------------------------------------------------------|------------|
| <b>Lösungen der Aufgaben</b>                            | <b>189</b> |
| Funktionentheorie . . . . .                             | 189        |
| Topologie und Analysis auf Mannigfaltigkeiten . . . . . | 191        |
| Funktionalanalysis . . . . .                            | 193        |
| <b>Index</b>                                            | <b>195</b> |