

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen	1
1 Elementare Logik und Mengenlehre	3
Einblick	3
Aussagen, Junktoren und Wahrheitstafeln	3
Sätze der Aussagenlogik	5
Prädikate und Quantoren	7
Mengen	10
Zahlen und Intervalle	12
Eigenschaften und Verknüpfungen von Mengen	14
Neue Buchstaben	17
Ausblick	17
Selbsttest	19
2 Definition, Satz, Beweis und mehr	21
Einblick	21
Grundlegendste Elemente bei der Formulierung von Mathematik . .	21
Formen des Beweisens	23
Direkte und indirekte Beweise	23
Konstruktive und nichtkonstruktive Beweise	25
Der Ringschluss	26
Das Gegenbeispiel	28
Vollständige Induktion	28
Ausblick	30
Selbsttest	31
3 Abbildungen	33
Einblick	33
Grundlegendes zu Abbildungen	33
Injektivität, Surjektivität, Bijektivität	35
Die Komposition von Abbildungen	37
Ausblick	39
Selbsttest	40

4	Körper und komplexe Zahlen	41
	Einblick	41
	Körper	41
	Die komplexen Zahlen	44
	Ausblick	49
	Selbsttest	50
	Aufgaben zu den mathematischen Grundlagen	51
II	Lineare Algebra	53
5	Vektorräume	55
	Einblick	55
	Grundlegendes zu Vektorräumen	55
	Ausblick	63
	Selbsttest	64
6	Basen und Untervektorräume	65
	Einblick	65
	Spann und Erzeugendensystem	65
	Lineare Unabhängigkeit, Basis	67
	Eindeutigkeit der Basisdarstellung, Untervektorräume	70
	Ausblick	73
	Selbsttest	74
7	Lineare Abbildungen und Dimensionssätze	75
	Einblick	75
	Definition und Beispiele linearer Abbildungen	75
	Kern und Bild linearer Abbildungen	77
	Dimensionssätze	79
	Ausblick	80
	Selbsttest	82
8	Matrizen	83
	Einblick	83
	Grundlegendes zu Matrizen	83
	Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung	84
	Der Rang einer Matrix	85
	Das Matrizenprodukt	87
	Besondere Matrizen	90
	Ausblick	91
	Selbsttest	92

9 Lineare Gleichungssysteme	93
Einblick	93
Grundlegendes zu linearen Gleichungssystemen und Gauß-Algorithmus	93
Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems	96
Ausblick	100
Selbsttest	102
10 Die Determinante	103
Einblick	103
Der Laplace'sche Entwicklungssatz	103
Berechnung von Determinanten in einfachen Fällen	106
Eigenschaften der Determinanten	108
Ausblick	110
Selbsttest	111
11 Eigenwerte und Eigenvektoren	113
Einblick	113
Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum	113
Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren	116
Algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten	118
Ausblick	122
Selbsttest	123
12 Koordinatenabbildung und Basiswechsel	125
Einblick	125
Die Koordinatenabbildung	125
Darstellende Matrizen und Basiswechsel	126
Ausblick	131
Selbsttest	132
13 Diagonalisierung	133
Einblick	133
Diagonalisierbare Matrizen	133
Weitere Kriterien für Diagonalisierbarkeit	136
Ausblick	139
Selbsttest	140
14 Normierte, euklidische und unitäre Vektorräume	141
Einblick	141
Normierte Vektorräume	141
Skalarprodukte	144
Das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren	149
Orthogonale Abbildungen	153

Ausblick	157
Selbsttest	159
Aufgaben zur linearen Algebra	161
 III Analysis	 165
15 Grundzüge der Analysis	167
Einblick	167
Folgen und Konvergenz	168
Rechenregeln für konvergente Folgen	171
Konvergenzkriterien für Folgen	174
Das Monotoniekriterium	174
Das Häufungspunktprinzip und das Cauchy-Kriterium	177
Ausblick	181
Selbsttest	183
 16 Stetigkeit	 185
Einblick	185
Grenzwerte von Funktionen	185
Definition und Beispiele stetiger Funktionen	190
Ausblick	194
Selbsttest	195
 17 Der Zwischenwertsatz und Extrema stetiger Funktionen	 197
Einblick	197
Der Zwischenwertsatz	197
Bestimmte Divergenz	199
Maximum/Minimum und Supremum/Infimum	200
Maximum und Minimum stetiger Funktionen	201
Ausblick	202
Selbsttest	203
 18 Differenzierbarkeit	 205
Einblick	205
Grundlegendes zum Differenzieren	205
Differenzierbare und stetige Funktionen	208
Rechenregeln für Ableitungen	208
Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	211
Der Mittelwertsatz	212
Monotone Funktionen	214
Die Regel von L'Hospital	216

Ausblick	217
Selbsttest	219
19 Das Taylor-Polynom und lokale Extrema	221
Einblick	221
Höhere Ableitungen	222
Das Taylor-Polynom	224
Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen	229
Ausblick	230
Selbsttest	232
20 Unendliche Reihen	233
Einblick	233
Definition und Beispiele von Reihen	233
Die geometrische Reihe	235
Konvergenzkriterien für Reihen	238
Ausblick	244
Selbsttest	245
21 Potenzreihen	247
Einblick	247
Grundlegendes zu Potenzreihen	247
Der Konvergenzradius einer Potenzreihe	249
Die Taylor-Reihe	253
Ausblick	257
Selbsttest	258
22 Das Riemann'sche Integral	259
Einblick	259
Riemann'sche Summen	260
Rechenregeln der Integration	266
Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	267
Rechentechniken der Integration	269
Die Substitutionsregel	269
Partielle Integration	271
Ausblick	278
Selbsttest	280
23 Uneigentliche Integrale	281
Einblick	281
Kritische Stellen des Integrationsintervalls	282
Unendliche Integrationsgrenzen	284
Das Integralvergleichskriterium für Reihen	285

Ausblick	286
Selbsttest	289
Aufgaben zur Analysis	291
Lösungen der Selbsttests	295
Lösungen der Aufgaben	299
Literatur und Ausklang	319
Index	322