

Inhaltsverzeichnis

Teil I Einführung und Grundlagen

1	Mathematik – Wissenschaft und Werkzeug	3
1.1	Über dieses Lehrbuch, Mathematiker und Mathematik	4
1.2	Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler	8
1.3	Die didaktischen Elemente dieses Buches	11
1.4	Ratschläge zum Studium der Höheren Mathematik	15
2	Logik, Mengen, Abbildungen – die Sprache der Mathematik	17
2.1	Eine beweisende Wissenschaft	18
2.2	Grundbegriffe der Aussagenlogik	19
2.3	Definition, Satz, Beweis	26
2.4	Elementare Mengenlehre	30
2.5	Zahlenmengen	33
2.6	Abbildungen	37
2.7	Mächtigkeit von Mengen	41
	Zusammenfassung	44
	Aufgaben	46
	Antworten zu den Selbstfragen	49
3	Rechentechniken – die Werkzeuge der Mathematik	51
3.1	Terme, Brüche und Potenzen	52
3.2	Gleichungen und Ungleichungen	59
3.3	Von Betrag und Abschätzungen	68
3.4	Summen und Produkte	72
3.5	Die vollständige Induktion	83
	Zusammenfassung	90
	Aufgaben	93
	Antworten zu den Selbstfragen	97

4	Elementare Funktionen – Bausteine der Analysis	99
4.1	Reellwertige Funktionen einer Veränderlichen	100
4.2	Polynome	107
4.3	Die Exponentialfunktion	119
4.4	Trigonometrische Funktionen	126
	Zusammenfassung	135
	Aufgaben	137
	Antworten zu den Selbstfragen	139
5	Komplexe Zahlen – Rechnen mit imaginären Größen	141
5.1	Die Menge der komplexen Zahlen	142
5.2	Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen	148
5.3	Mengen und Transformationen in der komplexen Ebene	159
	Zusammenfassung	164
	Aufgaben	165
	Antworten zu den Selbstfragen	167

Teil II Analysis einer reellen Variablen

6	Folgen – der Weg ins Unendliche	171
6.1	Der Begriff einer Folge	172
6.2	Elementare Eigenschaften von Zahlenfolgen	175
6.3	Konvergenz	180
6.4	* Teilfolgen und Häufungspunkte	188
6.5	Konvergenzkriterien	191
	Zusammenfassung	198
	Aufgaben	200
	Antworten zu den Selbstfragen	202
7	Stetige Funktionen – kleine Ursachen haben kleine Wirkungen	203
7.1	Zur Definition von Funktionen	204
7.2	Beschränkte und monotone Funktionen	209
7.3	Die Umkehrfunktion	211
7.4	Grenzwerte für Funktionen und die Stetigkeit	215
7.5	Kompakte Mengen	221
7.6	Sätze über reellwertige, stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich	226
	Zusammenfassung	236
	Aufgaben	238
	Antworten zu den Selbstfragen	240

8	Reihen – Summieren bis zum Letzten	241
8.1	Die Idee der Reihen	242
8.2	Kriterien für Konvergenz	251
8.3	Absolute Konvergenz	260
8.4	Kriterien für absolute Konvergenz	264
	Zusammenfassung	271
	Aufgaben	273
	Antworten zu den Selbstfragen	275
9	Potenzreihen – Alleskönner unter den Funktionen	277
9.1	Definition und Grundlagen	278
9.2	Die Darstellung von Funktionen durch Potenzreihen	286
9.3	Die Exponentialfunktion	293
9.4	Trigonometrische Funktionen	298
9.5	Der Logarithmus für komplexe Argumente	305
	Zusammenfassung	309
	Aufgaben	311
	Antworten zu den Selbstfragen	313
10	Differenzialrechnung – Veränderungen kalkulieren	315
10.1	Die Ableitung	316
10.2	Differenziationsregeln	327
10.3	Verhalten differenzierbarer Funktionen	335
10.4	Taylorreihen	347
10.5	Spline-Interpolation	362
	Zusammenfassung	367
	Aufgaben	369
	Antworten zu den Selbstfragen	372
11	Integrale – vom Sammeln und Bilanzieren	373
11.1	Das Lebesgue-Integral	374
11.2	Stammfunktionen	385
11.3	Integrale über unbeschränkte Intervalle oder Funktionen	391
11.4	Geometrische Anwendungen des Integrals	402
11.5	Parameterintegrale	409
	Zusammenfassung	415
	Aufgaben	417
	Antworten zu den Selbstfragen	420

12	Integrationstechniken – Tipps, Tricks und Näherungsverfahren	421
12.1	Grundtechniken	422
12.2	Partielle Integration	425
12.3	Substitutionsmethode	429
12.4	Integration rationaler Funktionen	436
12.5	Numerische Integration	446
	Zusammenfassung	457
	Aufgaben	459
	Antworten zu den Selbstfragen	461
13	Differenzialgleichungen – Zusammenspiel von Funktionen und ihren Ableitungen	463
13.1	Begriffsbildungen	464
13.2	Numerische Lösungsmethoden	477
13.3	Analytische Lösungsmethoden	482
13.4	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung	490
	Zusammenfassung	505
	Aufgaben	507
	Antworten zu den Selbstfragen	510
 Teil III Lineare Algebra		
14	Lineare Gleichungssysteme – Grundlage der linearen Algebra	513
14.1	Erste Lösungsversuche	514
14.2	Das Lösungsverfahren von Gauß und Jordan	519
14.3	Das Lösungskriterium und Anwendungen	526
14.4	Numerische Lösungsmethoden linearer Gleichungssysteme	532
	Zusammenfassung	536
	Aufgaben	538
	Antworten zu den Selbstfragen	540
15	Vektorräume – Schauplätze der linearen Algebra	541
15.1	Der Vektorraumbegriff	542
15.2	Beispiele von Vektorräumen	549
15.3	Untervektorräume	551
15.4	Basis und Dimension	553
15.5	Affine Teilräume	562
	Zusammenfassung	567
	Aufgaben	569
	Antworten zu den Selbstfragen	572

16	Matrizen und Determinanten – Zahlen in Reihen und Spalten	573
16.1	Addition und Multiplikation von Matrizen	574
16.2	Das Invertieren von Matrizen	580
16.3	Symmetrische und orthogonale Matrizen	586
16.4	Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme	595
16.5	Einführung in die Determinanten	598
16.6	Definition und Eigenschaften der Determinante	602
16.7	Anwendungen der Determinante	607
	Zusammenfassung	611
	Aufgaben	613
	Antworten zu den Selbstfragen	615
17	Lineare Abbildungen und Matrizen – abstrakte Sachverhalte in Zahlen ausgedrückt	617
17.1	Ein einführendes Beispiel	618
17.2	Definition einer linearen Abbildung und Beispiele	620
17.3	Kern, Bild und die Dimensionsformel	626
17.4	Darstellungsmatrizen	630
17.5	Basistransformation	636
17.6	Determinanten von Endomorphismen	639
	Zusammenfassung	641
	Aufgaben	643
	Antworten zu den Selbstfragen	646
18	Eigenwerte und Eigenvektoren – oder wie man Matrizen diagonalisiert	647
18.1	Das Diagonalisieren von Matrizen	648
18.2	Eigenwerte und Eigenvektoren	652
18.3	Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren	655
18.4	Diagonalisierbarkeit von Matrizen	661
18.5	Diagonalisierung symmetrischer und hermitescher Matrizen	666
18.6	Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren	669
18.7	Die Exponentialfunktion für Matrizen	675
18.8	* Die Jordan-Normalform einer Matrix	678
	Zusammenfassung	690
	Aufgaben	692
	Antworten zu den Selbstfragen	694

19	Analytische Geometrie – Rechnen statt Zeichnen	697
19.1	Punkte und Vektoren im Anschauungsraum	698
19.2	Das Skalarprodukt im Anschauungsraum	702
19.3	Weitere Vektorverknüpfungen im Anschauungsraum	709
19.4	Wechsel zwischen kartesischen Koordinatensystemen	723
	Zusammenfassung	735
	Aufgaben	736
	Antworten zu den Selbstfragen	739
20	Euklidische und unitäre Vektorräume – Geometrie in höheren Dimensionen	741
20.1	Euklidische Vektorräume	742
20.2	Norm, Abstand, Winkel, Orthogonalität	746
20.3	Orthonormalbasen und orthogonale Komplemente	751
20.4	Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme	761
20.5	Unitäre Vektorräume	762
	Zusammenfassung	767
	Aufgaben	769
	Antworten zu den Selbstfragen	771
21	Quadriken – ebenso nützlich wie dekorativ	773
21.1	Symmetrische Bilinearformen	774
21.2	Hermiteische Sesquilinearformen	781
21.3	Quadriken und ihre Hauptachsentransformation	785
21.4	Die Singulärwertzerlegung	798
21.5	*Die Pseudoinverse einer linearen Abbildung	800
	Zusammenfassung	810
	Aufgaben	812
	Antworten zu den Selbstfragen	814
22	Tensoren – geschicktes Hantieren mit Indizes	815
22.1	Einführung in die Tensoralgebra	816
22.2	Kartesische Tensoren	823
	Zusammenfassung	832
	Aufgaben	834
	Antworten zu den Selbstfragen	836

23	Lineare Optimierung – ideale Ausnutzung von Kapazitäten	837
23.1	Typische Problemstellungen	838
23.2	Sonderfälle von Optimierungsproblemen	842
23.3	Definitionen und Theorie	844
23.4	Wandern von Ecke zu Ecke	847
23.5	Das Simplexverfahren	852
	Zusammenfassung	858
	Aufgaben	860
	Antworten zu den Selbstfragen	863

Teil IV Analysis mehrerer reeller Variablen

24	Funktionen mehrerer Variablen – Differenzieren im Raum	867
24.1	Wozu Funktionen von mehreren Variablen?	868
24.2	Stetigkeit	872
24.3	Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit	876
24.4	Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	890
24.5	Der Hauptsatz über implizite Funktionen	897
24.6	Extremwertaufgaben	903
	Zusammenfassung	910
	Aufgaben	913
	Antworten zu den Selbstfragen	916
25	Gebietsintegrale – das Ausmessen von Körpern	917
25.1	Definition und Eigenschaften	918
25.2	Volumen, Masse und Schwerpunkt	929
25.3	Die Transformationsformel	934
25.4	Wichtige Koordinatensysteme	939
	Zusammenfassung	948
	Aufgaben	950
	Antworten zu den Selbstfragen	953
26	Kurven und Flächen – von Krümmung, Torsion und Längenmessung	955
26.1	Ebene Kurven	956
26.2	Die Bogenlänge von Kurven	961
26.3	Die Krümmung ebener Kurven	964
26.4	Raumkurven	967
26.5	Darstellung von Flächen	974
26.6	Basissysteme krummliniger Koordinaten	978
	Zusammenfassung	986
	Aufgaben	988
	Antworten zu den Selbstfragen	991

27	Vektoranalysis – von Quellen und Wirbeln	993
27.1	Skalar- und Vektorfelder	994
27.2	Differenzialoperatoren	996
27.3	Kurvenintegrale	1008
27.4	Oberflächenintegrale	1015
27.5	Integralsätze	1017
27.6	Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten	1025
	Zusammenfassung	1031
	Aufgaben	1034
	Antworten zu den Selbstfragen	1038
28	Differenzialgleichungssysteme – ein allgemeiner Zugang zu Differenzialgleichungen	1039
28.1	Definition und qualitatives Lösungsverhalten	1040
28.2	Existenz von Lösungen	1045
28.3	* Die Herleitung des Satzes von Picard-Lindelöf	1051
28.4	Die Lösung linearer Differenzialgleichungssysteme	1056
28.5	Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme: Konvergenz, Konsistenz und Stabilität	1066
28.6	Randwertprobleme: Theorie und numerische Verfahren	1071
	Zusammenfassung	1081
	Aufgaben	1083
	Antworten zu den Selbstfragen	1086
29	Partielle Differenzialgleichungen – Modelle von Feldern und Wellen	1089
29.1	Klassifizierung partieller Differenzialgleichungen	1090
29.2	Separationsansätze	1098
29.3	Quasilineare partielle Differenzialgleichungen erster Ordnung	1105
29.4	Potenzialtheorie	1111
29.5	Die Methode der finiten Elemente	1117
	Zusammenfassung	1125
	Aufgaben	1128
	Antworten zu den Selbstfragen	1131
Teil V Höhere Analysis		
30	Fouriertheorie – von schwingenden Saiten	1135
30.1	Trigonometrische Polynome	1136
30.2	Approximation im quadratischen Mittel	1139
30.3	Fourierreihen	1146

30.4 Die diskrete Fouriertransformation	.1157
Zusammenfassung	.1165
Aufgaben	.1167
Antworten zu den Selbstfragen	.1169
31 Funktionalanalysis – Operatoren wirken auf Funktionen	.1171
31.1 Normierte Räume, Banachräume, Hilberträume	.1172
31.2 Lineare, beschränkte Operatoren und Funktionale	.1179
31.3 Funktionale und Distributionen	.1185
31.4 Operatoren in Hilberträumen	.1193
31.5 * Approximation von Operatoren	.1199
Zusammenfassung	.1202
Aufgaben	.1205
Antworten zu den Selbstfragen	.1207
32 Funktionentheorie – von komplexen Zusammenhängen	.1209
32.1 Komplexe Funktionen und Differenzierbarkeit	.1210
32.2 Komplexe Kurvenintegrale	.1222
32.3 Laurent-Reihen und Residuensatz	.1234
Zusammenfassung	.1246
Aufgaben	.1249
Antworten zu den Selbstfragen	.1252
33 Integraltransformationen – Multiplizieren statt Differenzieren	.1253
33.1 Transformation von Funktionen	.1254
33.2 Die Laplacetransformation	.1257
33.3 Die Fouriertransformation	.1271
Zusammenfassung	.1285
Aufgaben	.1287
Antworten zu den Selbstfragen	.1289
34 Spezielle Funktionen – nützliche Helfer	.1291
34.1 Die Gammafunktion	.1292
34.2 Differenzialgleichungen aus Separationsansätzen	.1294
34.3 Das Sturm-Liouville-Problem	.1296
34.4 Orthogonalpolynome und Kugelfunktionen	.1298
34.5 Zylinderfunktionen	.1305
Zusammenfassung	.1308
Aufgaben	.1311
Antworten zu den Selbstfragen	.1313

35	Optimierung und Variationsrechnung – Suche nach dem Besten	.1315
35.1	Optimierungsaufgaben	.1316
35.2	Optimierung unter Nebenbedingungen	.1323
35.3	Variationsrechnung	.1327
35.4	Numerische Verfahren zur Optimierung	.1336
	Zusammenfassung	.1347
	Aufgaben	.1349
	Antworten zu den Selbstfragen	.1351
 Teil VI Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik		
36	Deskriptive Statistik – wie man Daten beschreibt	.1355
36.1	Grundbegriffe	.1356
36.2	Darstellungsformen	.1358
36.3	Lageparameter	.1365
36.4	Streuungsparameter	.1374
36.5	Strukturparameter	.1380
36.6	Mehrdimensionale Verteilungen	.1382
	Zusammenfassung	.1394
	Aufgaben	.1397
	Antworten zu den Selbstfragen	.1400
37	Wahrscheinlichkeit – die Gesetze des Zufalls	.1401
37.1	Wahrscheinlichkeits-Axiomatik	.1402
37.2	Die bedingte Wahrscheinlichkeit	.1409
37.3	Die stochastische Unabhängigkeit	.1414
37.4	Kombinatorik	.1416
	Zusammenfassung	.1421
	Aufgaben	.1423
	Antworten zu den Selbstfragen	.1427
38	Zufällige Variable – der Zufall betritt den $\mathbb{R}^1$	.1429
38.1	Der Begriff der Zufallsvariablen	.1430
38.2	Erwartungswert und Varianz einer zufälligen Variablen	.1438
38.3	Das Gesetz der großen Zahlen und der Hauptsatz der Statistik	.1444
38.4	Mehrdimensionale zufällige Variable	.1450
	Zusammenfassung	.1456
	Aufgaben	.1459
	Antworten zu den Selbstfragen	.1462

39	Spezielle Verteilungen – Modelle des Zufalls	.1463
39.1	Spezielle diskrete Verteilungsmodelle	.1464
39.2	Stetige Verteilungen	.1474
39.3	Die Normalverteilungsfamilie	.1483
	Zusammenfassung	.1499
	Aufgaben	.1502
	Antworten zu den Selbstfragen	.1505
40	Schätz- und Testtheorie – Bewerten und Entscheiden	.1507
40.1	Grundaufgaben der induktiven Statistik	.1508
40.2	Die Likelihood und der Maximum-Likelihood-Schätzer	.1510
40.3	Die Güte einer Schätzung	.1518
40.4	Konfidenzintervalle	.1522
40.5	Grundprinzipien der Testtheorie	.1530
	Zusammenfassung	.1538
	Aufgaben	.1541
	Antworten zu den Selbstfragen	.1544
41	Lineare Regression – die Suche nach Abhängigkeiten	.1545
41.1	Die Ausgleichsgeraden	.1546
41.2	Das Regressionsmodell	.1548
41.3	Schätzen und Testen im linearen Modell	.1553
41.4	Die lineare Einfachregression	.1560
41.5	Fallstricke im linearen Modell	.1566
	Zusammenfassung	.1580
	Aufgaben	.1583
	Antworten zu den Selbstfragen	.1586
	Hinweise zu den Aufgaben	.1587
	Lösungen zu den Aufgaben	.1613
	Bildnachweis	.1641
	Symbolglossar	.1643
	Sachverzeichnis	.1653