

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen

1 Bestimmte und allgemeine Zahlen	14
1.1 Geschichtliches, Zahldarstellung, Zahlensysteme	14
1.1.1 Geschichtliches	14
1.1.2 Zahldarstellung	14
1.1.3 Zahlensysteme	15
1.2 Bestimmte Zahlen, allgemeine Zahlen	16
1.2.1 Bestimmte Zahlen	16
1.2.2 Allgemeine Zahlen	17
1.3 Grundrechenarten für ganze Zahlen	18
1.3.1 Die Addition	18
1.3.2 Die Subtraktion	18
1.3.3 Die Multiplikation	19
1.3.4 Das Quadrat einer Zahl, der Potenzbegriff	19
1.3.5 Die Division	20
1.4 Brüche	21
1.4.1 Bruchrechnung	21
1.4.2 Dezimalbrüche	24
1.5 Proportionen	26
1.5.1 Definition und Eigenschaften	26
1.5.2 Direkte und indirekte Proportionalität	28
1.5.3 Prozentrechnung	30
1.6 Aufgaben	31
2 Klammern, Terme, Summen	34
2.1 Klammern	34
2.1.1 Einführung in die Klammerrechnung	34
2.1.2 Mehrere Klammern, Schachtelung	35
2.2 Terme, Summen	35
2.2.1 Definition des Begriffes Term	35
2.2.2 Erklärung der Summe, Summanden	36
2.2.3 Addition und Subtraktion zweier Summen	37
2.2.4 Multiplikation einer Summe mit einer Zahl, Ausklammern eines Faktors	38
2.2.5 Multiplikation zweier Summen	38
2.2.6 Binomische Formeln	39

2.2.7	Division einer Summe durch eine Zahl, Kürzen	45
2.2.8	Division einer Summe durch eine Summe, Bruchterme, Zerlegen in Faktoren	46
2.3	Aufgaben	50
3	Mengen	54
3.1	Definition	54
3.2	Relationen und Operationen mit Mengen	55
3.3	Aussagen und Aussageformen	58
3.4	Aufgaben	59

II Funktionen und Gleichungen

4	Lineare Gleichungen, Determinanten	62
4.1	Gleichungen	62
4.1.1	Definition	62
4.1.2	Bedeutung der Gleichung	62
4.1.3	Geschichtliches	63
4.1.4	Einteilung der Gleichungen	63
	4.1.4.1 Identische Gleichungen	63
	4.1.4.2 Funktionsgleichungen	64
	4.1.4.3 Bestimmungsgleichungen	64
4.2	Das Lösen von Bestimmungsgleichungen	65
4.2.1	Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten	66
4.2.2	Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten	68
4.2.3	Drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten	70
4.2.4	n lineare Gleichungen mit n Unbekannten	72
4.3	Gleichungssysteme und Determinanten	73
4.3.1	Zweireihige Determinanten, Cramer-Regel	73
4.3.2	Dreireihige Determinanten, Regel von Sarrus	77
4.3.3	Determinantengesetze	79
4.3.4	n -reihige Determinanten	83
4.4	Ungleichungen	83
4.4.1	Definitionen	83
4.4.2	Rechengesetze für Ungleichungen	84
4.4.3	Intervalle	85
4.4.4	Lineare Ungleichungen	86
	4.4.4.1 Lineare Ungleichungen mit einer Variablen	86
	4.4.4.2 Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen	86
	4.4.4.3 Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen	88
4.5	Aufgaben	89
5	Funktionen	94
5.1	Definition und Darstellung von Funktionen	94
5.1.1	Der Funktionsbegriff	94
5.1.2	Darstellung von Funktionen	95
	5.1.2.1 Die Funktionstafel	95

	5.1.2.2	Die Funktionsgleichung	97
	5.1.2.3	Die Funktionskurve	100
5.2		Die lineare Funktion	102
	5.2.1	Definition und grafische Darstellung	102
	5.2.2	Grafische Lösung einer linearen Gleichung	109
	5.2.3	Grafische Lösung von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten	111
	5.2.4	Anwendungsbezogene Beispiele	114
5.3		Die Umkehrfunktion	119
5.4		Aufgaben	120
6		Potenzrechnung, die Potenzfunktion	122
6.1		Einführung	122
	6.1.1	Begriff der Potenz, Definitionen	122
	6.1.2	Geschichtliches	123
6.2		Potenzgesetze (Rechengesetze der Potenzen)	123
	6.2.1	Addition/Subtraktion von Potenzen	123
	6.2.2	Multiplikation von Potenzen	124
	6.2.2.1	Potenzen mit gleichen Exponenten	124
	6.2.2.2	Potenzen mit gleichen Basen	124
	6.2.3	Division von Potenzen	124
	6.2.3.1	Potenzen mit gleichen Exponenten	124
	6.2.3.2	Potenzen mit gleichen Basen	124
	6.2.4	Potenzieren einer Potenz	125
6.3		Anwendungen	126
6.4		Die Potenzfunktion	128
	6.4.1	Definition	128
	6.4.2	Graphen der Potenzfunktionen	129
	6.4.2.1	Parabeln	129
	6.4.2.2	Hyperbeln	137
	6.4.3	Anwendungen	139
6.5		Aufgaben	141
7		Wurzelrechnung, Wurzelfunktionen	144
7.1		Einführung	144
	7.1.1	Grundbegriffe und Definitionen	144
	7.1.2	Quadratwurzel	146
	7.1.3	Kubikwurzel	147
	7.1.4	Rationale und irrationale Zahlen	148
	7.1.5	Geschichtliches	149
7.2		Rechengesetze für Wurzeln	150
	7.2.1	Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten	150
	7.2.2	Addition und Subtraktion von Wurzeln	151
	7.2.3	Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten	152
	7.2.4	Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten	153
	7.2.5	Radizieren von Potenzen	154
	7.2.6	Radizieren von Wurzeln	154
	7.2.7	Wurzeln mit verschiedenen Exponenten	155

7.3	Rationalmachen des Nenners	156
7.4	Wurzelfunktionen	158
7.5	Aufgaben	162
8	Quadratische und Wurzelgleichungen	164
8.1	Definitionen	164
8.2	Lösungsverfahren	165
8.2.1	Sonderfälle	165
8.2.1.1	Rein quadratische Gleichungen	165
8.2.1.2	Quadratische Gleichungen mit fehlendem Absolutglied	167
8.2.2	Gemischt-quadratische Gleichungen	168
8.2.2.1	Quadratische Ergänzung, die p - q -Formel	168
8.2.2.2	Lösung in allgemeiner Form	172
8.2.2.3	Grafische Lösungen	173
8.3	Geschichtliches	175
8.4	Anwendungsbeispiele	175
8.5	Wurzelgleichungen	178
8.6	Aufgaben	180
9	Exponential- und Logarithmusfunktion	182
9.1	Exponentialfunktion	182
9.1.1	Grundbegriffe und Definition	182
9.1.2	Grafische Darstellung	183
9.1.3	e-Funktion	185
9.2	Logarithmische Funktion, Logarithmenrechnung	189
9.2.1	Logarithmische Funktion	189
9.2.2	Rechnen mit Logarithmen	192
9.2.3	Geschichtliches	196
9.2.4	Exponentialgleichungen	198
9.2.5	Funktionspapiere mit logarithmischem Maßstab	202
9.2.5.1	Einfach-logarithmisches Papier	202
9.2.5.2	Doppelt-logarithmisches Papier	205
9.3	Aufgaben	207
10	Trigonometrische Funktionen	209
10.1	Winkel	209
10.1.1	Definition	209
10.1.2	Grad- und Bogenmaß	210
10.1.3	Winkel an Geraden und Parallelen	214
10.2	Winkelfunktionen	216
10.2.1	Definition der Winkelfunktionen	216
10.2.2	Darstellung der Winkelfunktionen am Einheitskreis	221
10.2.3	Graphen und Eigenschaften der Winkelfunktionen	224
10.2.3.1	Die Graphen der Winkelfunktionen	224
10.2.3.2	Periodizität	225
10.2.3.3	Definitions- und Wertebereich	225
10.2.3.4	Symmetrieeigenschaften	226
10.3	Additionstheoreme	226
10.3.1	Herleitung	227

10.3.2	Funktionen des doppelten Winkels	229
10.3.3	Summe und Differenz der sin- und cos-Werte zweier Winkel . .	230
10.3.4	Quadrantenrelationen	230
10.4	Arkusfunktionen	231
10.4.1	Definition	231
10.4.2	Grafische Darstellung der Arkusfunktionen	233
10.4.3	Darstellung am Einheitskreis	233
10.4.4	Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen	234
10.4.5	Bestimmung von Winkeln mit den Arkusfunktionen	234
10.5	Goniometrische Gleichungen	235
10.6	Sinusfunktion, harmonische Schwingungen	239
10.7	Aufgaben	244
11	Algebraische rationale Funktionen	246
11.1	Einteilung der Funktionen	246
11.2	Algebraische ganzrationale Funktionen	246
11.2.1	Grundbegriffe	246
11.2.2	Horner-Schema	254
11.3	Algebraische gebrochene rationale Funktionen	257
11.3.1	Definitionen	257
11.3.2	Besondere Eigenschaften der gebrochenen rationalen Funktion .	258
11.3.2.1	Nullstellen	258
11.3.2.2	Polstellen	259
11.3.2.3	Lücken	263
11.3.2.4	Asymptoten	264
11.3.3	Partialbruchzerlegung	271
11.4	Aufgaben	275
12	Grundlagen der Differenzialrechnung	277
12.1	Einführung, Definitionen	277
12.1.1	Aufgabe der Differenzialrechnung	277
12.1.2	Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten – der Differenzialquotient	279
12.1.3	Ableitung als Funktion	286
12.1.4	Höhere Ableitungen	287
12.1.5	Differenzial	288
12.2	Differenziationsregeln	290
12.2.1	Differenzieren einer konstanten Funktion	290
12.2.2	Faktorregel	290
12.2.3	Summenregel	291
12.2.4	Produktregel	291
12.2.5	Quotientenregel	293
12.2.6	Kettenregel	294
12.2.7	Differenzieren einer implizit gegebenen Funktion	297
12.2.8	Differenzieren mithilfe der Umkehrfunktion	300
12.2.9	Logarithmisches Differenzieren	301
12.3	Ableitungen einiger elementarer Funktionen	302

12.4	Einige Anwendungen der Differenzialrechnung	303
12.4.1	Kurvenuntersuchungen	303
12.4.1.1	Ganze Funktionen	303
12.4.1.2	Gebrochene rationale Funktionen	308
12.4.2	Optimierungsaufgaben	312
12.4.3	Näherungsweise Lösung von Bestimmungsgleichungen	317
12.5	Aufgaben	323
13	Grundlagen der Integralrechnung	324
13.1	Anwendung der Integralrechnung	324
13.2	Unbestimmte Integrale	324
13.2.1	Stammfunktionen und Umkehrung der Differenziation	324
13.2.2	Grundintegrale	326
13.2.3	Geometrische Deutung der Stammfunktionen	327
13.2.4	Ausblick: Differenzialgleichungen	329
13.2.5	Integrationsregeln	330
13.2.6	Lineare Substitution	330
13.3	Bestimmte Integrale	333
13.3.1	Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe	333
13.3.2	Bestimmtes Integral und Stammfunktion	335
13.3.3	Rechenregeln für bestimmte Integrale	336
13.3.3.1	Umkehrung des Integrationsweges	336
13.3.3.2	Zerlegung des Integrationsweges	336
13.3.3.3	Linearität	336
13.3.4	Lineare Substitution	337
13.3.5	Eine Anwendung aus der Mechanik	339
13.3.6	Geometrische Anwendungen	343
13.3.6.1	Flächenberechnung	343
13.3.6.2	Berechnung von Bogenlängen	349
13.3.6.3	Berechnung von Rauminhalten und Mantelflächen von rotationssymmetrischen Körpern	352
13.3.7	Arbeitsintegrale	355
13.3.7.1	Mechanische Arbeit	355
13.3.7.2	Elektrische Arbeit	360
13.3.8	Mittelwerte	362
13.4	Aufgaben	367

III Geometrie und Vektorrechnung

14	Das Dreieck	370
14.1	Allgemeines	370
14.2	Die Kongruenz von Dreiecken	373
14.3	Die Ähnlichkeit von Dreiecken	375
14.4	Höhen, Mittelsenkrechte und Seitenhalbierende	377
14.5	Flächeninhalt des Dreiecks	379
14.6	Das rechtwinklige Dreieck	380
14.7	Das gleichschenklige Dreieck	384
14.8	Das gleichseitige Dreieck	385

14.9	Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks	385
14.9.1	Allgemeines	385
14.9.2	Der Sinussatz	386
14.9.3	Der Cosinussatz	388
14.9.4	Die Grundaufgaben der Dreiecksberechnung	391
14.10	Aufgaben	393
15	Das Viereck, Vielecke	396
15.1	Das allgemeine Viereck	396
15.2	Spezielle Vierecke	398
15.3	Das n -Eck	401
15.4	Aufgaben	404
16	Der Kreis	406
16.1	Definition, Umfang und Fläche	406
16.2	Geraden, Strecken und Winkel am Kreis	407
16.3	Kreis Sektor und Kreis segment	412
16.4	Ähnlichkeitssätze am Kreis	414
16.5	Zwei Kreise	415
16.6	Aufgaben	418
17	Körperberechnung	420
17.1	Allgemeines über Körper	420
17.2	Der Quader	421
17.3	Das Prisma	423
17.4	Die Pyramide	426
17.5	Der Zylinder	432
17.6	Der Kegel	434
17.7	Die Kugel	436
17.8	Aufgaben	440
18	Grundlagen der Vektorrechnung	443
18.1	Grundbegriffe, Definitionen	443
18.1.1	Vektor und Skalar	443
18.1.2	Definitionen	445
18.2	Rechengesetze	446
18.2.1	Addition	446
18.2.2	Subtraktion	447
18.2.3	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	448
18.3	Komponenten, Koordinaten, Richtungswinkel	449
18.4	Lineare Abhängigkeit von Vektoren	453
18.5	Skalares Produkt zweier Vektoren	459
18.5.1	Definitionen	459
18.5.2	Eigenschaften des skalaren Produktes	459
18.5.3	Komponentendarstellung des Skalarproduktes	462
18.6	Vektorprodukt zweier Vektoren	464
18.6.1	Definition	464
18.6.2	Eigenschaften des Vektorproduktes	465
18.6.3	Komponentendarstellung des Vektorproduktes	466

18.7	Spatprodukt	470
18.7.1	Definition	470
18.7.2	Geometrische Deutung des Spatproduktes	471
18.7.3	Rechengesetze	472
18.8	Aufgaben	472
Lösungen		474
Sachwortverzeichnis		497