

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorrechnung	1
1.1	Grundlagen der Vektorrechnung	1
1.1.1	Richtung und Betrag	2
1.1.2	Normierung	3
1.1.3	Einfache Rechenoperationen	4
1.1.4	Masse und Schwerpunkt	7
1.1.5	Kanonische Basisdarstellung	9
1.1.6	Geometrie mit Vektoren	9
1.1.7	Statik	12
1.2	Skalarprodukt	17
1.2.1	Skalarprodukt und Projektion	17
1.2.2	Folgerungen aus dem Skalarprodukt	19
1.2.3	Skalarprodukt in Komponenten	20
1.2.4	Weitere Rechenregeln	22
1.2.5	Parallel-Senkrecht-Zerlegung	23
1.2.6	Skalarprodukte in der Physik	26
1.3	Kreuzprodukt	28
1.3.1	Definition des Kreuzprodukts	28
1.3.2	Folgerungen und Rechenregeln	29
1.3.3	Kreuzprodukt in Komponenten	30
1.3.4	Doppelte Produkte	32
1.3.5	Lorentz-Kraft	35
1.4	Vektorgleichungen	37
1.4.1	Geradengleichung	37
1.4.2	Ebenengleichung	39
1.4.3	Kreis- und Kugelgleichung	42
1.5	Koordinatensysteme	44
1.5.1	Orientierung	44
1.5.2	Orthonormalbasis und Koordinatensysteme	45
1.5.3	Prominente Koordinatensysteme	46

2	Lineare Algebra	53
2.1	Matrizenrechnung	53
2.1.1	Matrixbegriff	53
2.1.2	Grundlegende Rechengesetze	54
2.1.3	Die Determinante	60
2.1.4	Inverse einer Matrix	64
2.1.5	Weitere Matrixoperationen	65
2.2	Lineare Gleichungssysteme	71
2.2.1	Was ist ein lineares Gleichungssystem?	71
2.2.2	Gauß-Algorithmus	72
2.2.3	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	74
2.2.4	Matrizengleichungen	77
2.3	Abbildungen	80
2.3.1	Abbildungsmatrix	80
2.3.2	Spiegelungen	83
2.3.3	Drehungen	84
2.3.4	Allgemeine Drehmatrix	89
2.3.5	Basiswechsel = Drehung des Koordinatensystems	91
2.4	Diagonalisierung und Hauptachsentransformation	93
2.4.1	Eigenwertproblem	94
2.4.2	Diagonalisierung	94
2.4.3	Quadriken	98
2.4.4	Hauptachsentransformation	100
3	Rechnen mit Indizes	107
3.1	Einstein'sche Summenkonvention	107
3.2	Skalarprodukt und das Kronecker-Symbol	109
3.2.1	Skalarprodukt in Indizes	109
3.2.2	Definition des Kronecker-Symbols	110
3.2.3	Rechenregeln für das Kronecker-Symbol	111
3.2.4	Interpretation des Kronecker-Symbols	113
3.3	Das Levi-Civita-Symbol	114
3.3.1	Zyklische und antizyklische Permutationen	114
3.3.2	Definition des Levi-Civita-Symbols	115
3.3.3	Spatprodukt und Kreuzprodukt in Kurzform	116
3.4	Produkte mit Kronecker und Levi-Civita	119
3.5	„Anwendungen“	121
3.5.1	Beweis der bac-cab-Formel	121
3.5.2	Matrizenrechnung in Kurzform	121
3.5.3	Tensoren	124
4	Differenzialrechnung	129
4.1	Ableitungen	129
4.1.1	Begriff der Ableitung	130
4.1.2	Ableitungsregeln	133
4.1.3	Kurvendiskussion light	139

4.2	Mehrdimensionale Ableitungen	146
4.2.1	Skalare Funktionen mehrerer Veränderlicher	146
4.2.2	Partielle Ableitung und Gradient	149
4.2.3	Lokale Extrema	153
4.3	Reihenentwicklung	159
4.3.1	Taylor-Entwicklung in 1-D	159
4.3.2	Hilfreiche Reihen	161
4.3.3	e hoch Matrix	163
4.3.4	Allgemeine Taylor-Entwicklung	165
4.4	Ableitung vektorwertiger Funktionen	168
4.4.1	Jacobi-Matrix und Funktionaldeterminante	169
4.4.2	Kettenregel	171
4.4.3	Totales Differenzial	174
5	Integration	181
5.1	Grundlegende Integralrechnung	181
5.1.1	Integralbegriff	182
5.1.2	Der Hauptsatz	183
5.1.3	Einfache Integrationsregeln und -tricks	185
5.2	Integrationsmethoden	188
5.2.1	Partielle Integration	189
5.2.2	Integration durch Substitution	191
5.2.3	Ableiten nach Parametern	194
5.2.4	Partialbruchzerlegung	196
5.3	Mehrfachintegration	199
5.3.1	Flächenintegrale	199
5.3.2	Volumenintegrale	202
5.3.3	Integraltransformationssatz	205
5.3.4	Masse und Schwerpunkt	208
5.4	Distributionen	213
5.4.1	Delta-Distribution	214
5.4.2	Der große Bruder: $\Theta(x)$	219
6	Bahnkurven	223
6.1	Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung	223
6.2	Bewegungen	226
6.2.1	Geradlinig gleichförmige Bewegung	226
6.2.2	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung	228
6.2.3	Kreisbewegung	230
6.2.4	Zusammengesetzte Bewegungen	232
6.3	Bogenlänge	234
6.4	Bahnkurven in krummlinigen Koordinaten	237

7	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	241
7.1	Grundlagen	241
7.1.1	Was ist eine Differenzialgleichung (DGL)?	241
7.1.2	Klassifikation und Terminologie	242
7.1.3	Eine wichtige DGL: Newton	243
7.2	Lösungsansätze	244
7.3	Gekoppelte Differenzialgleichungen	257
8	Komplexe Zahlen	263
8.1	Grundlagen	263
8.1.1	Definition der komplexen Zahlen	263
8.1.2	Rechenregeln	264
8.1.3	Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten	266
8.2	Trigonometrie mit komplexen Zahlen	268
8.2.1	Euler-Formel	268
8.2.2	Sinus und Kosinus	270
8.3	Anwendungen	271
8.3.1	Komplexe Exponentialreihe	271
8.3.2	Harmonischer Oszillator	272
9	Vektoranalysis	275
9.1	Was ist ein Feld?	275
9.2	Operatoren der Vektoranalysis	276
9.2.1	Gradient, Divergenz und Rotation	277
9.2.2	Der Laplace-Operator	279
9.2.3	Noch mehr ∇	280
9.2.4	Ableiten in Indeschreibweise	282
9.3	Krummlinige Koordinaten	286
9.3.1	Bestimmung der Basisvektoren in neuen Koordinaten	286
9.3.2	Tangentialvektoren und Oberflächenintegrale	288
9.3.3	Der metrische Tensor	290
9.3.4	∇ in krummlinigen Koordinaten	293
9.4	Integralsätze	299
9.4.1	Satz von Gauß	299
9.4.2	Satz von Stokes, Kurvenintegral	302
10	Fourier-Analysis	307
10.1	Die Idee	307
10.2	Fourier-Reihe	308
10.2.1	Fourier-Zerlegung	308
10.2.2	Eigenschaften der Fourier-Reihe	309
10.2.3	Parsevals Theorem	311

10.3	Fourier-Transformation	312
10.3.1	Definition und Eigenschaften.	313
10.3.2	Spezielle Fourier	314
10.3.3	Fourier-Trafo der Zeit	316
10.3.4	3-D- und 4-D-Fourier-Transformation	317
10.3.5	DGL-Lösung per Fourier	317
11	Partielle Differenzialgleichungen.	321
11.1	Was ist eine partielle Differenzialgleichung?	321
11.2	Laplace-Gleichung und Poisson-Gleichung	323
11.2.1	Laplace-Gleichung.	323
11.2.2	Kugelsymmetrische Lösung.	324
11.2.3	Poisson-Gleichung	324
11.3	Kontinuitätsgleichung	326
11.4	Diffusionsgleichung	328
11.4.1	Diffusion und Wärmeausbreitung	328
11.4.2	Formale Lösung der Diffusionsgleichung	329
11.4.3	Diffusion im kugelsymmetrischen Fall	331
11.4.4	Allgemeine Lösung	332
11.5	Wellen	335
11.5.1	Die Wellengleichung	335
11.5.2	1-D-Wellengleichung.	335
11.5.3	Kugelsymmetrische Lösung.	339
11.5.4	Ebene Wellen	340
12	Anwendungen in der Mechanik.	345
12.1	Grundbegriffe.	345
12.2	Newton.	346
12.2.1	Newton'sche Axiome	346
12.2.2	Newton'sche Bewegungsgleichung	347
12.2.3	Wichtige mechanische Kräfte	349
12.2.4	Konservative Kräfte, Zentralkräfte.	352
12.3	Energie, Impuls und Arbeit	356
12.3.1	Energiesatz und Potenzial	356
12.3.2	Impuls und Stöße	362
12.3.3	Arbeit	366
12.3.4	Formale Lösung des 1-D-Energiesatzes.	371
12.4	Rotierende Punktmassen	374
12.4.1	Kinematik der Rotation	374
12.4.2	Drehimpuls und Drehmoment	377
12.4.3	Drehimpulserhaltung	378
12.4.4	Drehmomentengleichgewicht	379
12.4.5	Kräfte in rotierenden Systemen	379

12.5	Teilchen im Potenzial	383
12.5.1	Bewegungen im Potenzial	384
12.5.2	Symmetrien und Erhaltungsgrößen	385
12.5.3	Effektives Potenzial	386
12.6	Schwingungen	390
12.6.1	Das Federpendel	390
12.6.2	Mathematisches Pendel	392
12.6.3	Der harmonische Oszillator	393
12.6.4	Exakte Schwingungsperiode in einem Potenzial	402
12.6.5	Gekoppelte Schwingungen	403
12.6.6	Kleine Schwingungen im Potenzial	407
12.7	Kinematik und Dynamik des starren Körpers	414
12.7.1	Grundbegriffe	414
12.7.2	Trägheitstensor und -moment	416
12.7.3	Gesamtdrehmoment und Gesamtdrehimpulserhaltung	421
12.7.4	Stabile Rotation	421
12.7.5	Rotationsenergie	422
13	Ausgewählte Anwendungen in der Elektrodynamik	427
13.1	Bewegung eines geladenen Teilchens	427
13.1.1	Ladung	428
13.1.2	Stromdichte und Strom	429
13.1.3	Kontinuitätsgleichung	431
13.1.4	Ladung in $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feldern	432
13.2	Maxwell-Gleichungen	435
13.2.1	Interpretation der Maxwell-Gleichungen	436
13.2.2	Andere Maßsysteme	438
13.2.3	Integrale Maxwell-Gleichungen	439
13.2.4	Kontinuitätsgleichung reloaded	439
13.3	Elemente der Elektrostatik	441
13.3.1	Gleichungen der Elektrostatik	441
13.3.2	Lösung durch Ansatz	442
13.3.3	Lösung per Skalarpotenzial	444
13.4	Elemente der Magnetostatik	448
13.4.1	Gleichungen der Magnetostatik	448
13.4.2	Lösung durch Ansatz	449
13.4.3	Lösung per Vektorpotenzial, Satz von Biot-Savart	451
13.5	Elektromagnetische Wellen	454
13.5.1	Homogene Wellengleichungen	454
13.5.2	Ebene elektromagnetische Wellen	458
13.5.3	Lösung der allgemeinen Maxwell-Gleichungen	460

Anhang A: Klausur „spielen“	465
Anhang B: Lösungen zu den „Hausübungsaufgaben“	471
Literatur.	523
Sachverzeichnis	525