

Stephan Rosebrock

# **Geometrische Gruppentheorie**

**Ein Einstieg mit dem Computer.  
Basiswissen für Studium  
und Mathematikunterricht**



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>vii</b>
<b>1 Einführung in die euklidische Geometrie</b>	<b>1</b>
1.1 Isometrien . . . . .	1
1.2 Figuren und Permutationen . . . . .	4
1.3 Struktur von Isometrien . . . . .	7
1.4 Höherdimensionale Räume . . . . .	11
<b>2 Einführung in Gruppen</b>	<b>15</b>
2.1 Gruppdefinition und die Diedergruppen . . . . .	15
2.2 Gruppenordnung und abelsche Gruppen . . . . .	20
2.3 Zyklische Gruppen . . . . .	24
2.4 Eigenschaften von Gruppen . . . . .	27
2.5 Die Ordnung eines Elements . . . . .	29
<b>3 Untergruppen und Homomorphismen</b>	<b>35</b>
3.1 Untergruppen . . . . .	35
3.2 Nebenklassen und der Satz von Lagrange . . . . .	43
3.3 Homomorphismen . . . . .	47
3.4 Normalteiler . . . . .	53
3.5 Translationen . . . . .	58
<b>4 Gruppenoperationen</b>	<b>61</b>
4.1 Die symmetrische Gruppe . . . . .	61
4.2 Operationen von Gruppen auf Mengen . . . . .	66
4.3 Die Bahnformel und die Klassengleichung . . . . .	71
4.4 Cayley-Graphen . . . . .	76
4.5 Eine Zerlegung der Ebene . . . . .	80
<b>5 Gruppenpräsentationen</b>	<b>87</b>
5.1 Gruppenpräsentationen . . . . .	87
5.2 Freie Gruppen . . . . .	92
5.3 Tietze Transformationen und Entscheidbarkeit . . . . .	96

<b>6</b>	<b>Produkte von Gruppen</b>	<b>103</b>
6.1	Das direkte Produkt . . . . .	103
6.2	Das freie Produkt . . . . .	107
6.3	Das semidirekte Produkt . . . . .	109
6.4	Diskontinuierliche Gruppen und Translationen . . . . .	113
<b>7</b>	<b>Endliche Gruppen</b>	<b>117</b>
7.1	Ein Beispiel . . . . .	117
7.2	Die Sylowsätze . . . . .	119
7.3	Einige Gruppen kleiner Ordnung . . . . .	123
7.4	Die orthogonale Gruppe . . . . .	127
7.5	Reguläre Zerlegungen der 2-Sphäre . . . . .	129
<b>8</b>	<b>Die hyperbolischen Ebene</b>	<b>135</b>
8.1	Axiomatische Geometrie . . . . .	135
8.2	Isometrien in der hyperbolischen Ebene . . . . .	139
8.3	Zerlegungen der hyperbolischen Ebene . . . . .	144
<b>9</b>	<b>Hyperbolische Gruppen</b>	<b>151</b>
9.1	van Kampen Diagramme . . . . .	151
9.2	Quasi-Isometrien und der Satz von Švarc-Milnor . . . . .	155
9.3	Isoperimetrische Ungleichungen . . . . .	158
9.4	Hyperbolische Gruppen . . . . .	163
9.5	Kämmungen . . . . .	169
<b>Anhang</b>		<b>173</b>
A	Die Isometrien der Ebene . . . . .	173
B	Matrizen . . . . .	175
C	Zeichenerklärung . . . . .	179
D	Wichtige Gruppen . . . . .	181
E	Verwendete GAP Kommandos . . . . .	182
F	Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben . . . . .	183
G	Erläuterungen zur Literatur . . . . .	197
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>198</b>
<b>Index</b>		<b>203</b>