

Stephan Rosebrock

# **Geometrische Gruppentheorie**

**Ein Einstieg mit dem Computer.  
Basiswissen für Studium  
und Mathematikunterricht**



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>vii</b>
<b>1 Einführung in die euklidische Geometrie</b>	<b>1</b>
1.1 Isometrien . . . . .	1
1.2 Figuren und Permutationen . . . . .	4
1.3 Struktur von Isometrien . . . . .	7
1.4 Höherdimensionale Räume . . . . .	11
<b>2 Einführung in Gruppen</b>	<b>15</b>
2.1 Gruppendefinition und die Diedergruppen . . . . .	15
2.2 Gruppenordnung und abelsche Gruppen . . . . .	20
2.3 Zyklische Gruppen . . . . .	24
2.4 Eigenschaften von Gruppen . . . . .	27
2.5 Die Ordnung eines Elements . . . . .	29
<b>3 Untergruppen und Homomorphismen</b>	<b>35</b>
3.1 Untergruppen . . . . .	35
3.2 Nebenklassen und der Satz von Lagrange . . . . .	43
3.3 Homomorphismen . . . . .	47
3.4 Normalteiler . . . . .	53
3.5 Translationen . . . . .	58
<b>4 Gruppenoperationen</b>	<b>61</b>
4.1 Die symmetrische Gruppe . . . . .	61
4.2 Operationen von Gruppen auf Mengen . . . . .	66
4.3 Die Bahnformel und die Klassengleichung . . . . .	71
4.4 Cayley-Graphen . . . . .	76
4.5 Eine Zerlegung der Ebene . . . . .	80
<b>5 Gruppenpräsentationen</b>	<b>87</b>
5.1 Gruppenpräsentationen . . . . .	87
5.2 Freie Gruppen . . . . .	92
5.3 Tietze Transformationen und Entscheidbarkeit . . . . .	96

<b>6 Produkte von Gruppen</b>	<b>103</b>
6.1 Das direkte Produkt . . . . .	103
6.2 Das freie Produkt . . . . .	107
6.3 Das semidirekte Produkt . . . . .	109
6.4 Diskontinuierliche Gruppen und Translationen . . . . .	113
<b>7 Endliche Gruppen</b>	<b>117</b>
7.1 Ein Beispiel . . . . .	117
7.2 Die Sylowsätze . . . . .	119
7.3 Einige Gruppen kleiner Ordnung . . . . .	123
7.4 Die orthogonale Gruppe . . . . .	127
7.5 Reguläre Zerlegungen der 2-Sphäre . . . . .	129
<b>8 Die hyperbolischen Ebene</b>	<b>135</b>
8.1 Axiomatische Geometrie . . . . .	135
8.2 Isometrien in der hyperbolischen Ebene . . . . .	139
8.3 Zerlegungen der hyperbolischen Ebene . . . . .	144
<b>9 Hyperbolische Gruppen</b>	<b>151</b>
9.1 van Kampen Diagramme . . . . .	151
9.2 Quasi-Isometrien und der Satz von Švarc-Milnor . . . . .	155
9.3 Isoperimetrische Ungleichungen . . . . .	158
9.4 Hyperbolische Gruppen . . . . .	163
9.5 Kämmungen . . . . .	169
<b>Anhang</b>	<b>173</b>
A Die Isometrien der Ebene . . . . .	173
B Matrizen . . . . .	175
C Zeichenerklärung . . . . .	179
D Wichtige Gruppen . . . . .	181
E Verwendete GAP Kommandos . . . . .	182
F Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben . . . . .	183
G Erläuterungen zur Literatur . . . . .	197
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>198</b>
<b>Index</b>	<b>203</b>