

Inhaltsverzeichnis

1	Vektoranalysis	1
1.1	Einleitung	1
1.2	Vektoralgebra	2
1.2.1	Vektoraddition	2
1.2.2	Das Skalarprodukt	3
1.2.3	Das Vektorprodukt	4
1.3	Vektordifferenzialoperationen	9
1.3.1	Differenziation nach einem Parameter	10
1.3.2	Der Gradientenoperator	14
1.3.3	Die Divergenz eines Vektorfeldes	16
1.3.4	Die Rotation eines Vektorfeldes	18
1.3.5	Mehrfache Differenzialoperationen	20
1.4	Vektorintegraloperationen	21
1.4.1	Der Gauß'sche Satz	21
1.4.2	Der Green'sche Satz	23
1.4.3	Der Stokes'sche Satz	24
1.5	Orthogonale krummlinige Koordinaten	30
1.5.1	Zylinderkoordinaten	32
1.5.2	Kugelkoordinaten	34
1.6	Tensoren	35
1.6.1	Andere Definition eines Vektors	35
1.6.2	Definition eines Tensors	40
1.6.3	Diagonalisierung eines Tensors	41
1.6.4	Differenzial- und Integraloperationen	44
2	Komplexe Zahlen und Dirac's δ-Funktion	49
2.1	Einleitung	49
2.2	Komplexe Zahlen und elementare Funktionen	49
2.2.1	Komplexe Zahlen	50
2.2.2	Elementare Rechenregeln	50
2.2.3	Die Gauß'sche Zahlenebene	51

2.2.4	Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen	54
2.2.5	Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen	56
2.2.6	Die hyperbolischen Funktionen	57
2.2.7	Der Logarithmus	58
2.2.8	Abschließende Bemerkungen	59
2.3	Die Dirac'sche δ -Funktion	62
2.3.1	Definition der δ -Funktion	62
2.3.2	Rechenregeln der δ -Funktion	64
3	Der Funktionenraum	71
3.1	Einleitung	71
3.2	Die Fourier-Reihen	71
3.3	Das Fourier-Integral	76
3.4	Orthogonale Funktionensysteme	79
3.4.1	Das Skalarprodukt	79
3.4.2	Reihen nach orthogonalen Funktionen	81
3.4.3	Operatoren im Hilbert-Raum	83
3.5	Das Sturm-Liouville'sche Eigenwertproblem	89
4	Partielle Differenzialgleichungen	99
4.1	Einleitung	99
4.2	Lineare partielle Differenzialgleichungen der Physik	99
4.3	Die Separationsmethode	102
4.3.1	Beispiel	102
4.3.2	Separation der Helmholtz-Gleichung	104
4.4	Die Methode der Green-Funktion	108
4.4.1	Allgemeine Betrachtungen	108
4.4.2	Eigenschaften der Green-Funktion	111
4.4.3	Auffindung der Green-Funktion	113
4.4.4	Die Green-Funktion der Helmholtz-Gleichung	115
5	Spezielle Funktionen	129
5.1	Einleitung	129
5.2	Die Gammafunktion und Verwandtes	129
5.3	Gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen	137
5.3.1	Lösung von Differenzialgleichungen durch Potenzreihen	137
5.3.2	Differenzialgleichungen mit periodischen Koeffizienten	145
5.4	Kugelfunktionen	148
5.4.1	Die Legendre-Polynome	149
5.4.2	Zweite Definition der Legendre-Polynome	151
5.4.3	Orthogonalität der Legendre-Polynome	156
5.4.4	Die zugeordneten Legendre-Polynome	157
5.4.5	Die Kugelflächenfunktionen	159
5.4.6	Das Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen	161

5.5	Bessel-Funktionen	167
5.5.1	Reihenlösung der Bessel'schen Differenzialgleichung	168
5.5.2	Bessel-Funktionen mit ganzzahligem Index	170
5.5.3	Rekursionsformeln und Verwandtes	173
5.5.4	Sphärische Bessel-Funktionen	175
5.5.5	Modifizierte Bessel-Funktionen	179
5.5.6	Das Sturm-Liouville-Problem der Bessel-Funktionen	181
5.6	Die Hermite- und Laguerre-Funktionen	189
5.6.1	Die Hermite-Funktionen	190
5.6.2	Die Laguerre-Funktionen	195
6	Variationsrechnung	205
6.1	Einleitung	205
6.2	Die Euler-Gleichung der Variationsrechnung	205
6.3	Variationsproblem mit mehreren abhängigen Veränderlichen	211
6.4	Variationsproblem mit mehreren unabhängigen Veränderlichen	213
6.5	Die isoperimetrischen Probleme	216
6.5.1	Isoperimetrische Probleme mit mehreren abhängigen Veränderlichen	217
6.5.2	Isoperimetrische Probleme mit mehreren unabhängigen Veränderlichen	220
7	Theorie komplexer Funktionen	223
7.1	Einleitung	223
7.2	Die analytischen Funktionen	223
7.2.1	Die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen	224
7.2.2	Die konforme Abbildung	226
7.2.3	Elementare Rechenoperationen analytischer Funktionen	227
7.2.4	Singularitäten analytischer Funktionen	228
7.2.5	Der unendlich ferne Punkt	231
7.3	Integration im komplexen Gebiet	231
7.3.1	Linienintegrale in der komplexen Zahlenebene	231
7.3.2	Der Fundamentalsatz von Cauchy	233
7.3.3	Der Fundamentalsatz für mehrfach zusammenhängende Bereiche	241
7.3.4	Die Integralformel von Cauchy	243
7.3.5	Analytische Fortsetzung	247
7.3.6	Der Cauchy'sche Residuensatz	248
7.3.7	Anwendungen des Residuensatzes	249
7.3.8	Berechnung bestimmter Integrale	252
7.4	Die Laplace-Transformation	262
7.4.1	Vorbemerkungen	262

7.4.2	Definition der Laplace-Transformation	262
7.4.3	Drei wichtige Theoreme	263
8	Wahrscheinlichkeit und Statistik	269
8.1	Einleitende Bemerkungen	269
8.2	Kombinatorik	269
8.2.1	Permutationen und Kombinationen	269
8.2.2	Die Binomialkoeffizienten	272
8.3	Wahrscheinlichkeitstheorie	274
8.3.1	Definition der Wahrscheinlichkeit	274
8.3.2	Mittelwert und quadratische Abweichung	275
8.4	Spezielle Verteilungen	277
8.4.1	Die Bernoulli-Verteilung	277
8.4.2	Die Gauß-Verteilung	278
8.4.3	Die Poisson-Verteilung	281
A	Differenzial- und Integralrechnung	283
A.1	Differenzialrechnung	283
A.1.1	Die Ableitung	283
A.1.2	Die partielle Ableitung	283
A.1.3	Elementare Ableitungsregeln	284
A.1.4	Ableitung trigonometrischer und inverser Funktionen	285
A.1.5	Ableitung hyperbolischer und inverser Funktionen	285
A.1.6	Differenziale	285
A.1.7	Maxima und Minima einer Funktion	286
A.1.8	Mittelwertsätze	286
A.1.9	Unbestimmte Formen	287
A.1.10	Der Taylor'sche Satz	287
A.1.11	Reihen elementarer Funktionen	288
A.1.12	Differenziation von Integralen	289
A.2	Integralrechnung	289
A.2.1	Das unbestimmte Integral	289
A.2.2	Integration von Polynomen	290
A.2.3	Integration rationaler Funktionen	290
A.2.4	Integration trigonometrischer Funktionen	291
A.2.5	Exponentialfunktion und hyperbolische Funktionen	291
A.2.6	Integration von Wurzelausdrücken	292
A.2.7	Integration von Produkten	292
A.2.8	Das bestimmte Integral	293
A.2.9	Ungleichungen zwischen Integralen	294
A.2.10	Uneigentliche Integrale	294
A.2.11	Bestimmte Integrale von Funktionen	295
A.2.12	Variablentransformation bei Mehrfachintegralen	295
A.3	Elementare Differenzialgleichungen	296
A.3.1	Methode der Variablentrennung	296

A.3.2	Methode der Variablensubstitution	296
A.3.3	Lagrange-Methode der Variation der Konstanten	297
A.3.4	Methode von Bernoulli	297
A.3.5	Erniedrigung des Grades einer Differenzialgleichung . .	297
A.3.6	Vollständiges Differenzial	298
B	Lineare Algebra	299
B.1	Matrizen	299
B.1.1	Matrixdefinition und Multiplikation	299
B.1.2	Matrixtypen und Rechenregeln	300
B.1.3	Matrizen mit komplexen Elementen	302
B.2	Determinanten	304
B.2.1	Definition einer Determinante	304
B.2.2	Rechenregeln für Determinanten	304
B.3	Lösung eines linearen Gleichungssystems	305
B.3.1	Inhomogenes Gleichungssystem	305
B.3.2	Homogenes Gleichungssystem	306
C	Einige ergänzende Bücher	309
	Index	311