

Erwin Hake · Konstantin Meskouris

Statik der Flächentragwerke

Einführung
mit vielen durchgerechneten Beispielen

2., korrigierte Auflage

Mit 220 Abbildungen

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Der ein- und der zweiachsige Spannungszustand	1
1.2	Scheiben	4
1.3	Platten	5
1.4	Faltwerke	6
1.5	Schalen	7
1.5.1	Standardformen	7
1.5.2	Spannungszustände in Schalen	8
1.5.3	Verknüpfung mehrerer Rotationsschalen	10
2	Die Scheibentheorie	11
2.1	Allgemeines	11
2.1.1	Das Tragverhalten von Scheiben	11
2.1.1.1	Der wandartige Träger	13
2.1.1.2	Kreis- und Kreisringscheiben	14
2.1.1.3	Krafteinleitungsprobleme	15
2.1.2	Idealisierungen und Annahmen	15
2.2	Die Scheibengleichung in kartesischen Koordinaten	16
2.2.1	Gleichgewicht am Scheibenelement	16
2.2.2	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen	18
2.2.3	Verträglichkeitsbedingung	19
2.2.4	Die AIRYSche Spannungsfunktion	20
2.2.5	Das Elastizitätsgesetz von HOOKE	20
2.2.6	Die Scheibengleichung	21
2.2.7	Berechnung der Verformungen	21
2.2.8	Der ebene Dehnungszustand	22
2.2.9	Die Randbedingungen	23
2.3	Elementare Lösungen in kartesischen Koordinaten	24
2.3.1	Allgemeines Vorgehen	24
2.3.2	Biharmonische Funktionen	24
2.3.3	Ebener, homogener Spannungszustand	26
2.3.4	Reiner Schubspannungszustand	27
2.3.5	Reine Biegung	28

2.3.6	Staumauer mit Dreieckquerschnitt	29
2.3.6.1	Lastfall Eigengewicht	30
2.3.6.2	Lastfall Wasserdruck	31
2.3.6.3	Superposition der beiden Lastfälle	32
2.4	Transformation auf Polarkoordinaten bei Rotationssymmetrie	33
2.4.1	Scheibengleichung	33
2.4.2	Spannungen	35
2.5	Elementare rotationssymmetrische Lösungen in Polarkoordinaten	36
2.5.1	Biharmonische Funktionen	36
2.5.2	Kreisscheibe mit konstanter radialer Randlast	36
2.5.3	Kreisringscheibe mit konstanter radialer Randlast außen	38
2.5.4	Kreisringscheibe mit konstanter radialer Randlast innen	40
2.5.5	Zusammengesetzte Kreisscheibe	42
2.5.6	Schrumpfring	44
2.5.7	Reine Biegung eines Kreisringsektors	45
2.5.8	Der Satz von BETTI an der Kreisringscheibe	47
2.5.9	Grenzübergang zum stabförmigen Kreisring	49
2.6	Die Berechnung des wandartigen Trägers unter Verwendung von FOURIER-Reihen	50
2.6.1	Entwicklung der Randbelastung in eine Reihe	50
2.6.2	Wandartiger Träger mit Randlast	52
2.6.2.1	Spannungsermittlung	52
2.6.2.2	Zahlenbeispiele	55
2.6.2.3	Durchlaufscheiben unter Gleichlast	57
2.7	Die mitwirkende Breite des Plattenbalkens	61
2.7.1	Problemstellung	61
2.7.2	Definition der mitwirkenden Breite	62
2.7.3	Ansatz für die Spannungsfunktion	62
2.7.4	Randbedingungen des Gurtes	63
2.7.5	Lösung bei Belastung mit einem einzelnen Reihenglied	64
2.7.6	Die mitwirkende Plattenbreite im allgemeinen Fall	65
3	Die Plattentheorie	67
3.1	Die Tragwirkung von Platten	67
3.1.1	Allgemeines	67
3.1.2	Die Schnittgrößen von Platten	68
3.1.3	Hauptmomente	69
3.1.4	Lastaufteilungsverfahren für Rechteckplatten	72
3.2	Die Plattengleichung in kartesischen Koordinaten	75
3.2.1	Idealisierungen und Annahmen	75

3.2.2	Gleichgewicht am Plattenelement.....	76
3.2.3	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen	78
3.2.4	Spannungs-Verschiebungs-Beziehungen.....	79
3.2.5	Momenten-Verschiebungs-Beziehungen	80
3.2.6	Querkraft-Verschiebungs-Beziehungen.....	81
3.2.7	Plattengleichung	81
3.2.8	Die Randbedingungen.....	82
3.2.8.1	Randscherkräfte	82
3.2.8.2	Randbedingungen an geraden Rändern.....	83
3.2.9	Einfluß der Querdehnung.....	86
3.2.9.1	Allgemeines	86
3.2.9.2	Umrechnungsformeln für Platten mit von μ unabhängigen Randbedingungen.....	86
3.2.9.3	Rechteckplatten mit freiem Rand.....	87
3.2.10	Der Lastfall ungleichmäßige Temperatur	88
3.2.10.1	Temperaturverlauf	88
3.2.10.2	ΔT am Grundsystem	89
3.2.10.3	ΔT an der gelenkig gelagerten Platte	90
3.2.11	Die elastisch gebettete Platte	90
3.3	Vierseitig gelagerte Rechteckplatten	91
3.3.1	Allgemeines	91
3.3.2	Lösung der Plattengleichung mit Reihenansatz	92
3.3.2.1	Lösungsansatz.....	92
3.3.2.2	Lösung der Plattengleichung.....	93
3.3.2.3	Schnittgrößen	94
3.3.2.4	Auswertung für eine quadratische Platte	95
3.3.3	Zahlentafel für vierseitig gestützte Rechteckplatten unter Gleichlast.....	96
3.3.4	Allseits gelenkig gelagerte Rechteckplatte mit Randmoment.....	98
3.3.4.1	Verlauf der Biegemomente	98
3.3.4.2	Anwendungsbeispiel: Einfeldplatte mit auskragendem Balkon.....	98
3.3.4.3	Anwendungsbeispiel: Lastfall ΔT bei der gelenkig gelagerten Einfeldplatte	99
3.4	Grundgleichungen für Rotationssymmetrie.....	101
3.4.1	Plattengleichung	101
3.4.2	Schnittgrößen.....	101
3.4.3	Randbedingungen und Einfluß der Querdehnung.....	103
3.5	Kreis- und Kreisringplatten unter rotationssymmetrischer Belastung.....	104
3.5.1	Allgemeines zur Lösung der Plattengleichung in Polarkoordinaten.....	104
3.5.2	Gelenkig gelagerte Kreisplatte unter Gleichlast	105

3.5.3	Gelenkig gelagerte Kreisplatte mit Randmoment	108
3.5.4	Gelenkig gelagerte Kreisringplatte mit Randmoment....	110
3.5.5	Grenzübergang zum stabförmigen Ringträger	111
3.5.6	Tafeln für Kreis- und Kreisringplatten und Anwendungsbeispiele	113
3.5.6.1	Allgemeines zu den Tafeln	113
3.5.6.2	Beispiel 1: Eingespannte Kreisplatte unter Gleichlast	114
3.5.6.3	Beispiel 2: Zweifach gelagerte Kreisplatte ..	114
3.5.6.4	Beispiel 3: Kreisringplatte mit Lagerung zwischen Innen- und Außenrand	115
3.5.6.5	Beispiel 4: Kreisplatte mit Teilflächenlast...	116
3.5.6.6	Beispiel 5: Kreisplatte mit Auskragung unter Gleichlast	117
3.5.6.7	Beispiel 6: Kreisplatte mit unterschiedlicher Dicke	118
3.5.6.8	Beispiel 7: Kreis- und Kreisringplatte mit unterschiedlicher Dicke	121
3.5.7	Der Satz von BETTI an der Kreisplatte	122
3.6	Einflußflächen für Platten	123
3.6.1	Allgemeines	123
3.6.2	Die Singularitätenmethode	125
3.6.2.1	Allgemeines	125
3.6.2.2	Die Singularität des Feldmoments m_x	125
3.6.2.3	Der reguläre Anteil des Feldmoments m_x	129
3.6.3	Ausgewählte Einflußflächen	129
3.6.3.1	Einflußfläche für ein Feldmoment	129
3.6.3.2	Einflußfläche für ein Einspannmoment	130
3.6.3.3	Einflußfläche für ein Drillmoment	131
3.6.3.4	Einflußfläche für eine Querkraft	132
3.6.3.5	Einflußflächen für die Schnittgrößen von Kreisplatten	133
3.6.4	Auswertung von Einflußflächen	133
3.6.4.1	Lastverteilung in Platten	133
3.6.4.2	Auswertungsformeln	134
3.6.4.3	Beispiel 1: Maximale Feldmomente infolge einer Einzellast	135
3.6.4.4	Beispiel 2: Minimales Stützmoment infolge einer wandernden Teilflächenlast	138
3.7	Orthogonale Mehrfeldplatten	139
3.7.1	Allgemeines	139
3.7.2	Das Belastungsumordnungsverfahren	140
3.7.2.1	Ermittlung der Feldmomente	141
3.7.2.2	Ermittlung der Stützmomente	143

3.7.3	Das Verfahren von PIEPER/MARTENS	144
3.7.3.1	Ermittlung der Feldmomente	145
3.7.3.2	Ermittlung der Stützmomente	146
3.8	Näherungslösungen der Scheiben- und der Plattengleichung (Übersicht)	147
3.8.1	Allgemeines	147
3.8.2	Analytische Näherungen	148
3.8.2.1	Der Ansatz erfüllt die Differentialgleichung	148
3.8.2.2	Der Ansatz befriedigt die Randbedingungen	150
3.8.3	Numerische Lösungen	151
3.8.3.1	Differenzenverfahren	151
3.8.3.2	Die Methode der finiten Elemente	154
3.8.3.3	Die Methode der Randelemente	155
4	Der Kreisring unter rotationssymmetrischer Belastung	157
4.1	Allgemeines	157
4.2	Lastfall Radialkraft R_s	158
4.3	Lastfall Kreppelmoment M_s	159
4.4	Lastfall beliebige rotationssymmetrische Belastung	161
4.5	Der Kreisring mit Rechteckquerschnitt	163
4.5.1	Lastfall R mit beliebigem Angriffspunkt	164
4.5.2	Lastfall M mit beliebigem Angriffspunkt	164
4.5.3	Lösungen für ausgewählte Angriffspunkte von R und M	164
4.6	Der Kreisring mit einfach symmetrischem Querschnitt	164
4.7	Der Kreisring mit unsymmetrischem Querschnitt	168
5	Rotationsschalen unter rotationssymmetrischer Belastung ..	169
5.1	Allgemeines	169
5.1.1	Schalenformen	169
5.1.2	Spannungszustände in Schalen	170
5.2	Die Membrantheorie	172
5.2.1	Allgemeine Berechnung der Membrankräfte	172
5.2.2	Allgemeine Berechnung der Membranverformungen ...	174
5.2.3	Zylinderschalen	176
5.2.4	Kugel- und Kugelzonenschalen	179
5.2.4.1	Lastfall Eigengewicht der stehenden Kugelzonenschale	180
5.2.4.2	Lastfall Eigengewicht der stehenden Kugelschale	180
5.2.4.3	Lastfall Vertikallast am oberen Rand einer stehenden Kugelzonenschale	181

5.2.4.4	Lastfall Schnee auf der stehenden Kugelschale.....	182
5.2.4.5	Lastfall konstanter Innendruck in der Kugelschale.....	183
5.2.4.6	Lastfall hydrostatischer Druck in der hängenden Kugelschale	183
5.2.5	Kegel- und Kegelstumpfschalen	185
5.2.5.1	Lastfall Eigengewicht der stehenden Kegelstumpfschale.....	186
5.2.5.2	Lastfall Eigengewicht der stehenden Kegelschale.....	187
5.2.5.3	Lastfall Vertikallast am oberen Rand einer stehenden Kegelstumpfschale.....	187
5.2.5.4	Lastfall Schnee auf der Kegelschale.....	188
5.2.5.5	Lastfall konstanter Innendruck in der Kegelschale.....	188
5.2.5.6	Lastfall hydrostatischer Druck in der hängenden Kegelschale.....	189
5.3	Die Biegetheorie.....	189
5.3.1	Grundgleichungen.....	190
5.3.1.1	Gleichgewichtsbedingungen.....	190
5.3.1.2	Dehnungs-Verformungs-Beziehungen.....	192
5.3.1.3	Verkrümmungs-Verformungs-Beziehungen.....	192
5.3.1.4	Momenten-Verkrümmungs-Beziehungen....	193
5.3.2	Randstörungen der langen Zylinderschale	193
5.3.2.1	Herleitung der Differentialgleichung.....	193
5.3.2.2	Allgemeine Lösung der Differentialgleichung	196
5.3.2.3	Lösung für Radialkraft R und Moment M am oberen Rand	198
5.3.2.4	Lösung für Radialkraft R und Moment M am unteren Rand	200
5.3.3	Randstörungen der kurzen Zylinderschale.....	201
5.3.3.1	Allgemeine Lösung der Differentialgleichung	201
5.3.3.2	Lösung für Radialkraft R und Moment M am oberen Rand	203
5.3.3.3	Schnittgrößen	204
5.3.3.4	Randverformungen	205
5.3.4	Randstörungen der Kugelschale	207
5.3.4.1	Herleitung der Differentialgleichungen	207
5.3.4.2	Allgemeine Lösung der Differentialgleichungen für Randstörungen.	210

5.3.4.3	Lösung für Radialkraft R und Moment M am unteren Rand	212
5.3.4.4	Lösung für Radialkraft R und Moment M am oberen Rand	214
5.3.5	Randstörungen der Kegelschale	216
5.3.5.1	Herleitung der Differentialgleichungen	216
5.3.5.2	Lösung für Radialkraft R und Moment M am unteren Rand	219
5.3.5.3	Lösung für Radialkraft R und Moment M am oberen Rand	221
5.3.6	Randstörungen bei Rotationsschalen mit beliebiger Erzeugenden	222
5.3.7	Der Lastfall Temperatur bei Rotationsschalen	224
5.3.7.1	Temperaturbelastung der Schale	224
5.3.7.2	Beispiel für die Ermittlung der maßgebenden Temperaturbelastungen	225
5.3.7.3	Der Lastfall gleichmäßige Temperaturänderung T	226
5.3.7.4	Der Lastfall ungleichmäßige Temperatur ΔT	228
5.3.8	Der Lastfall Vorspannung bei Rotationsschalen	230
5.3.8.1	Spannverfahren für Schalen	230
5.3.8.2	Zylindervorspannung durch Wickeln (Bauzustand)	232
5.3.8.3	Zylindervorspannung mit Einzelspanngliedern	234
5.3.8.4	Einflußlinien für Schnittgrößen infolge radialer Linienlasten	235
5.4	Beispiele zusammengesetzter, rotationssymmetrischer Flächentragwerke	237
5.4.1	Kreisplatte auf zwei konzentrischen Zylindern	238
5.4.2	Zylindrischer Behälter mit doppelt gelagerter Kreisringplatte am oberen Rand	239
5.4.3	Zylindrischer Wasserbehälter mit Bodenplatte	240
5.4.4	Kurzer Zylinder mit Deckplatte auf schrägem Lager	241
5.4.5	Kurzer Zylinder mit zwei Kreisplatten unter Innendruck	243
5.4.6	Zylinder mit warmer Teilfüllung (Lastfall Temperatur)	245
5.4.7	Zylinder auf Torusschale	249
5.4.8	Kugelschale mit Fußring und Kreisringplatte	251
5.4.9	Kegelstumpfförmiger Behälter mit Kuppel und Bodenplatte	254
5.4.10	Zylindrischer Behälter mit Kugelboden und Kreisringscheibe	258

5.4.11	Zylindrischer Wasserbehälter mit kegelstumpfförmiger Haube und Zugring	259
6	Hilfstafeln	267
T. 1	Schnittkräfte und Randverformungen von Kreis- und Kreisringscheiben infolge konstanter Radiallast	267
T. 2	Zahlentafel zur Berechnung der Momente vierseitig gelagerter Rechteckplatten infolge Gleichlast ($\mu = 0$)	268
T. 3	Momentenbeiwerte nach PIEPER/MARTENS für vierseitig gelagerte Rechteckplatten	269
T. 4	Zahlentafel zur Berechnung der Biegemomente gelenkig gelagerter Rechteckplatten infolge eines sinusförmigen Randmoments	272
T. 5	Schnittgrößen von Kreisplatten mit rotationssymmetrischer Belastung	273
T. 6	Verformungen von Kreisplatten mit rotationssymmetrischer Belastung	274
T. 7	Schnittgrößen von Kreisringplatten mit rotationssymmetrischer Belastung	275
T. 8	Verformungen von Kreisringplatten mit rotationssymmetrischer Belastung	276
T. 9	Zahlentafeln für Kreisplatten mit rotationssymmetrischer Vertikallast ($\mu = 0,2$)	277
T. 10	Zahlentafeln für am Innenrand gelagerte Kreisringplatten mit rotationssymmetrischer Vertikallast ($\mu = 0,2$)	279
T. 11	Zahlentafeln für am Innenrand gelagerte Kreisringplatten mit Randmomenten ($\mu = 0,2$)	281
T. 12	Zahlentafeln für am Außenrand gelagerte Kreisringplatten mit Vertikalbelastung ($\mu = 0,2$)	283
T. 13	Zahlentafeln für am Außenrand gelagerte Kreisringplatten mit Randmomenten ($\mu = 0,2$)	284
T. 14	Schnittgrößen und Verformungen des Kreisrings mit Rechteckquerschnitt infolge rotationssymmetrischer Belastung ..	286
T. 15	Schnittgrößen und Randverformungen von Zylinderschalen im Membranzustand	287
T. 16	Membrankräfte in Kugelschalen infolge ausgewählter Lastfälle ..	288
T. 17	Membranverformungen von Kugelschalen konstanter Wandstärke infolge ausgewählter Lastfälle	289
T. 18	Membrankräfte in Kegelschalen infolge ausgewählter Lastfälle ..	290
T. 19	Membranverformungen von Kegelschalen konstanter Wandstärke infolge ausgewählter Lastfälle	291
T. 20	Tafel der Funktionen η , η' , η'' und η'''	292

T. 21	Schnittgrößen und Randverformungen langer Zylinderschalen ($\lambda \ell \geq 4$) infolge rotationssymmetrischer Randlasten R und M.....	293
T. 22	Tafel der Funktionen F_1 bis F_4 für kurze Zylinder.....	294
T. 23	Hilfswerte zur Berechnung der Randverformungen und Integrationskonstanten kurzer Zylinderschalen ($\lambda \ell \leq 4$).....	295
T. 24	Randverformungen kurzer Zylinderschalen ($\lambda \ell \leq 4$) infolge rotationssymmetrischer Randlasten R und M.....	296
T. 25	Schnittgrößen und Randverformungen von Kugel- und Kugelzonenschalen infolge rotationssymmetrischer Randlasten R und M.....	297
T. 26	Schnittgrößen und Randverformungen von Kegel- und Kegelzonenschalen infolge rotationssymmetrischer Randlasten R und M.....	299
7	Programm Flächentragwerke (CD-ROM)	301
7.1	Allgemeines.....	301
7.2	Anwendungsbereich	302
7.2.1	Rechteckplatten.....	302
7.2.2	Kreisplatten.....	303
7.2.3	Rotationsschalen	304
7.3	Anwendung	305
7.3.1	Rechteckplatten.....	305
7.3.2	Kreis- und Kreisringplatten.....	305
7.3.3	Rotationsschalen	306
	Literatur.....	307
	Sachverzeichnis.....	311