

Erwin Hake · Konstantin Meskouris

# Statik der Flächentragwerke

Einführung  
mit vielen durchgerechneten Beispielen

2., korrigierte Auflage

Mit 220 Abbildungen

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b> .....	1
1.1 Der ein- und der zweiachsige Spannungszustand .....	1
1.2 Scheiben .....	4
1.3 Platten .....	5
1.4 Faltwerke .....	6
1.5 Schalen .....	7
1.5.1 Standardformen .....	7
1.5.2 Spannungszustände in Schalen .....	8
1.5.3 Verknüpfung mehrerer Rotationsschalen .....	10
<b>2 Die Scheibentheorie</b> .....	11
2.1 Allgemeines .....	11
2.1.1 Das Tragverhalten von Scheiben .....	11
2.1.1.1 Der wandartige Träger .....	13
2.1.1.2 Kreis- und Kreisringscheiben .....	14
2.1.1.3 Krafteinleitungsprobleme .....	15
2.1.2 Idealisierungen und Annahmen .....	15
2.2 Die Scheibengleichung in kartesischen Koordinaten .....	16
2.2.1 Gleichgewicht am Scheibenelement .....	16
2.2.2 Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen .....	18
2.2.3 Verträglichkeitsbedingung .....	19
2.2.4 Die AIRYSche Spannungsfunktion .....	20
2.2.5 Das Elastizitätsgesetz von HOOKE .....	20
2.2.6 Die Scheibengleichung .....	21
2.2.7 Berechnung der Verformungen .....	21
2.2.8 Der ebene Dehnungszustand .....	22
2.2.9 Die Randbedingungen .....	23
2.3 Elementare Lösungen in kartesischen Koordinaten .....	24
2.3.1 Allgemeines Vorgehen .....	24
2.3.2 Biharmonische Funktionen .....	24
2.3.3 Ebener, homogener Spannungszustand .....	26
2.3.4 Reiner Schubspannungszustand .....	27
2.3.5 Reine Biegung .....	28

2.3.6	Staumauer mit Dreieckquerschnitt .....	29
2.3.6.1	Lastfall Eigengewicht .....	30
2.3.6.2	Lastfall Wasserdruck .....	31
2.3.6.3	Superposition der beiden Lastfälle .....	32
2.4	Transformation auf Polarkoordinaten bei Rotationssymmetrie .....	33
2.4.1	Scheibengleichung .....	33
2.4.2	Spannungen .....	35
2.5	Elementare rotationssymmetrische Lösungen in Polarkoordinaten .....	36
2.5.1	Biharmonische Funktionen .....	36
2.5.2	Kreisscheibe mit konstanter radialer Randlast .....	36
2.5.3	Kreisringscheibe mit konstanter radialer Randlast außen .....	38
2.5.4	Kreisringscheibe mit konstanter radialer Randlast innen .....	40
2.5.5	Zusammengesetzte Kreisscheibe .....	42
2.5.6	Schrumpfring .....	44
2.5.7	Reine Biegung eines Kreisringsektors .....	45
2.5.8	Der Satz von BETTI an der Kreisringscheibe .....	47
2.5.9	Grenzübergang zum stabförmigen Kreisring .....	49
2.6	Die Berechnung des wandartigen Trägers unter Verwendung von FOURIER-Reihen .....	50
2.6.1	Entwicklung der Randbelastung in eine Reihe .....	50
2.6.2	Wandartiger Träger mit Randlast .....	52
2.6.2.1	Spannungsermittlung .....	52
2.6.2.2	Zahlenbeispiele .....	55
2.6.2.3	Durchlausfscheiben unter Gleichlast .....	57
2.7	Die mitwirkende Breite des Plattenbalkens .....	61
2.7.1	Problemstellung .....	61
2.7.2	Definition der mitwirkenden Breite .....	62
2.7.3	Ansatz für die Spannungsfunktion .....	62
2.7.4	Randbedingungen des Gurtes .....	63
2.7.5	Lösung bei Belastung mit einem einzelnen Reihenglied .....	64
2.7.6	Die mitwirkende Plattenbreite im allgemeinen Fall .....	65
3	Die Plattentheorie .....	67
3.1	Die Tragwirkung von Platten .....	67
3.1.1	Allgemeines .....	67
3.1.2	Die Schnittgrößen von Platten .....	68
3.1.3	Hauptmomente .....	69
3.1.4	Lastaufteilungsverfahren für Rechteckplatten .....	72
3.2	Die Plattengleichung in kartesischen Koordinaten .....	75
3.2.1	Idealisierungen und Annahmen .....	75

3.2.2	Gleichgewicht am Plattenelement.....	76
3.2.3	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen .....	78
3.2.4	Spannungs-Verschiebungs-Beziehungen.....	79
3.2.5	Momenten-Verschiebungs-Beziehungen .....	80
3.2.6	Querkraft-Verschiebungs-Beziehungen.....	81
3.2.7	Plattengleichung .....	81
3.2.8	Die Randbedingungen.....	82
3.2.8.1	Randscherkräfte .....	82
3.2.8.2	Randbedingungen an geraden Rändern.....	83
3.2.9	Einfluß der Querdehnung.....	86
3.2.9.1	Allgemeines .....	86
3.2.9.2	Umrechnungsformeln für Platten mit von $\mu$ unabhängigen Randbedingungen.....	86
3.2.9.3	Rechteckplatten mit freiem Rand.....	87
3.2.10	Der Lastfall ungleichmäßige Temperatur .....	88
3.2.10.1	Temperaturverlauf .....	88
3.2.10.2	$\Delta T$ am Grundsystem .....	89
3.2.10.3	$\Delta T$ an der gelenkig gelagerten Platte .....	90
3.2.11	Die elastisch gebettete Platte .....	90
3.3	Vierseitig gelagerte Rechteckplatten .....	91
3.3.1	Allgemeines .....	91
3.3.2	Lösung der Plattengleichung mit Reihenansatz .....	92
3.3.2.1	Lösungsansatz.....	92
3.3.2.2	Lösung der Plattengleichung.....	93
3.3.2.3	Schnittgrößen.....	94
3.3.2.4	Auswertung für eine quadratische Platte .....	95
3.3.3	Zahlentafel für vierseitig gestützte Rechteckplatten un- ter Gleichlast .....	96
3.3.4	Allseits gelenkig gelagerte Rechteckplatte mit Randmoment.....	98
3.3.4.1	Verlauf der Biegemomente .....	98
3.3.4.2	Anwendungsbeispiel: Einfeldplatte mit auskragendem Balkon.....	98
3.3.4.3	Anwendungsbeispiel: Lastfall $\Delta T$ bei der gelenkig gelagerten Einfeldplatte .....	99
3.4	Grundgleichungen für Rotationssymmetrie.....	101
3.4.1	Plattengleichung .....	101
3.4.2	Schnittgrößen.....	101
3.4.3	Randbedingungen und Einfluß der Querdehnung.....	103
3.5	Kreis- und Kreisringplatten unter rotationssymmetrischer Belastung .....	104
3.5.1	Allgemeines zur Lösung der Plattengleichung in Polarkoordinaten.....	104
3.5.2	Gelenkig gelagerte Kreisplatte unter Gleichlast .....	105

3.5.3	Gelenkig gelagerte Kreisplatte mit Randmoment .....	108
3.5.4	Gelenkig gelagerte Kreisringplatte mit Randmoment....	110
3.5.5	Grenzübergang zum stabsförmigen Ringträger .....	111
3.5.6	Tafeln für Kreis- und Kreisringplatten und Anwendungsbeispiele .....	113
3.5.6.1	Allgemeines zu den Tafeln .....	113
3.5.6.2	Beispiel 1: Eingespannte Kreisplatte unter Gleichlast .....	114
3.5.6.3	Beispiel 2: Zweifach gelagerte Kreisplatte ..	114
3.5.6.4	Beispiel 3: Kreisringplatte mit Lagerung zwischen Innen- und Außenrand .....	115
3.5.6.5	Beispiel 4: Kreisplatte mit Teilflächenlast...	116
3.5.6.6	Beispiel 5: Kreisplatte mit Auskragung unter Gleichlast .....	117
3.5.6.7	Beispiel 6: Kreisplatte mit unterschiedlicher Dicke .....	118
3.5.6.8	Beispiel 7: Kreis- und Kreisringplatte mit unterschiedlicher Dicke .....	121
3.5.7	Der Satz von BETTI an der Kreisplatte .....	122
3.6	Einflußflächen für Platten.....	123
3.6.1	Allgemeines .....	123
3.6.2	Die Singularitätenmethode.....	125
3.6.2.1	Allgemeines .....	125
3.6.2.2	Die Singularität des Feldmoments $m_x$ .....	125
3.6.2.3	Der reguläre Anteil des Feldmoments $m_x$ .....	129
3.6.3	Ausgewählte Einflußflächen.....	129
3.6.3.1	Einflußfläche für ein Feldmoment .....	129
3.6.3.2	Einflußfläche für ein Einspannmoment .....	130
3.6.3.3	Einflußfläche für ein Drillmoment.....	131
3.6.3.4	Einflußfläche für eine Querkraft .....	132
3.6.3.5	Einflußflächen für die Schnittgrößen von Kreisplatten .....	133
3.6.4	Auswertung von Einflußflächen .....	133
3.6.4.1	Lastverteilung in Platten .....	133
3.6.4.2	Auswertungsformeln.....	134
3.6.4.3	Beispiel 1: Maximale Feldmomente infolge einer Einzellast .....	135
3.6.4.4	Beispiel 2: Minimales Stützmoment infolge einer wandernden Teilflächenlast .....	138
3.7	Orthogonale Mehrfeldplatten .....	139
3.7.1	Allgemeines .....	139
3.7.2	Das Belastungsumordnungsverfahren.....	140
3.7.2.1	Ermittlung der Feldmomente .....	141
3.7.2.2	Ermittlung der Stützmomente .....	143

---

3.7.3	Das Verfahren von PIEPER/MARTENS .....	144
3.7.3.1	Ermittlung der Feldmomente .....	145
3.7.3.2	Ermittlung der Stützmomente .....	146
3.8	Näherungslösungen der Scheiben- und der Plattengleichung (Übersicht).....	147
3.8.1	Allgemeines .....	147
3.8.2	Analytische Näherungen.....	148
3.8.2.1	Der Ansatz erfüllt die Differentialgleichung .....	148
3.8.2.2	Der Ansatz befriedigt die Randbedingungen .....	150
3.8.3	Numerische Lösungen .....	151
3.8.3.1	Differenzenverfahren .....	151
3.8.3.2	Die Methode der finiten Elemente .....	154
3.8.3.3	Die Methode der Randelemente.....	155
<b>4</b>	<b>Der Kreisring unter rotationssymmetrischer Belastung .....</b>	<b>157</b>
4.1	Allgemeines.....	157
4.2	Lastfall Radialkraft $R_s$ .....	158
4.3	Lastfall Krempelmoment $M_s$ .....	159
4.4	Lastfall beliebige rotationssymmetrische Belastung .....	161
4.5	Der Kreisring mit Rechteckquerschnitt .....	163
4.5.1	Lastfall $R$ mit beliebigem Angriffspunkt .....	164
4.5.2	Lastfall $M$ mit beliebigem Angriffspunkt .....	164
4.5.3	Lösungen für ausgewählte Angriffspunkte von $R$ und $M$ .....	164
4.6	Der Kreisring mit einfach symmetrischem Querschnitt .....	164
4.7	Der Kreisring mit unsymmetrischem Querschnitt .....	168
<b>5</b>	<b>Rotationsschalen unter rotationssymmetrischer Belastung ..</b>	<b>169</b>
5.1	Allgemeines.....	169
5.1.1	Schalenformen .....	169
5.1.2	Spannungszustände in Schalen .....	170
5.2	Die Membrantheorie.....	172
5.2.1	Allgemeine Berechnung der Membrankräfte.....	172
5.2.2	Allgemeine Berechnung der Membranverformungen....	174
5.2.3	Zylinderschalen.....	176
5.2.4	Kugel- und Kugelzonenschalen .....	179
5.2.4.1	Lastfall Eigengewicht der stehenden Kugelzonenschale .....	180
5.2.4.2	Lastfall Eigengewicht der stehenden Kugelschale.....	180
5.2.4.3	Lastfall Vertikallast am oberen Rand einer stehenden Kugelzonenschale .....	181

5.2.4.4	Lastfall Schnee auf der stehenden Kugelschale.....	182
5.2.4.5	Lastfall konstanter Innendruck in der Kugelschale.....	183
5.2.4.6	Lastfall hydrostatischer Druck in der hängenden Kugelschale .....	183
5.2.5	Kegel- und Kegelstumpfschalen .....	185
5.2.5.1	Lastfall Eigengewicht der stehenden Kegelstumpfschale.....	186
5.2.5.2	Lastfall Eigengewicht der stehenden Kugelschale.....	187
5.2.5.3	Lastfall Vertikallast am oberen Rand einer stehenden Kegelstumpfschale .....	187
5.2.5.4	Lastfall Schnee auf der Kugelschale .....	188
5.2.5.5	Lastfall konstanter Innendruck in der Kugelschale.....	188
5.2.5.6	Lastfall hydrostatischer Druck in der hängenden Kugelschale.....	189
5.3	Die Biegetheorie .....	189
5.3.1	Grundgleichungen.....	190
5.3.1.1	Gleichgewichtsbedingungen.....	190
5.3.1.2	Dehnungs-Verformungs-Beziehungen.....	192
5.3.1.3	Verkrümmungs-Verformungs-Beziehungen	192
5.3.1.4	Momenten-Verkrümmungs-Beziehungen....	193
5.3.2	Randstörungen der langen Zylinderschale .....	193
5.3.2.1	Herleitung der Differentialgleichung .....	193
5.3.2.2	Allgemeine Lösung der Differentialgleichung.....	196
5.3.2.3	Lösung für Radialkraft R und Moment M am oberen Rand .....	198
5.3.2.4	Lösung für Radialkraft R und Moment M am unteren Rand .....	200
5.3.3	Randstörungen der kurzen Zylinderschale.....	201
5.3.3.1	Allgemeine Lösung der Differentialgleichung.....	201
5.3.3.2	Lösung für Radialkraft R und Moment M am oberen Rand .....	203
5.3.3.3	Schnittgrößen.....	204
5.3.3.4	Randverformungen .....	205
5.3.4	Randstörungen der Kugelschale .....	207
5.3.4.1	Herleitung der Differentialgleichungen .....	207
5.3.4.2	Allgemeine Lösung der Differentialgleichungen für Randstörungen.	210

5.3.4.3	Lösung für Radialkraft R und Moment M am unteren Rand .....	212
5.3.4.4	Lösung für Radialkraft R und Moment M am oberen Rand .....	214
5.3.5	Randstörungen der Kegelschale .....	216
5.3.5.1	Herleitung der Differentialgleichungen .....	216
5.3.5.2	Lösung für Radialkraft R und Moment M am unteren Rand .....	219
5.3.5.3	Lösung für Radialkraft R und Moment M am oberen Rand .....	221
5.3.6	Randstörungen bei Rotationsschalen mit beliebiger Erzeugenden .....	222
5.3.7	Der Lastfall Temperatur bei Rotationsschalen .....	224
5.3.7.1	Temperaturbelastung der Schale .....	224
5.3.7.2	Beispiel für die Ermittlung der maßgebenden Temperaturbelastungen .....	225
5.3.7.3	Der Lastfall gleichmäßige Temperaturänderung T .....	226
5.3.7.4	Der Lastfall ungleichmäßige Temperatur $\Delta T$ .....	228
5.3.8	Der Lastfall Vorspannung bei Rotationsschalen .....	230
5.3.8.1	Spannverfahren für Schalen .....	230
5.3.8.2	Zylindervorspannung durch Wickeln (Bauzustand) .....	232
5.3.8.3	Zylindervorspannung mit Einzelspanngliedern .....	234
5.3.8.4	Einflußlinien für Schnittgrößen infolge radialer Linienlasten .....	235
5.4	Beispiele zusammengesetzter, rotationssymmetrischer Flächenträgwerke .....	237
5.4.1	Kreisplatte auf zwei konzentrischen Zylindern .....	238
5.4.2	Zylindrischer Behälter mit doppelt gelagerter Kreisringplatte am oberen Rand .....	239
5.4.3	Zylindrischer Wasserbehälter mit Bodenplatte .....	240
5.4.4	Kurzer Zylinder mit Deckplatte auf schrägem Lager .....	241
5.4.5	Kurzer Zylinder mit zwei Kreisplatten unter Innendruck .....	243
5.4.6	Zylinder mit warmer Teilfüllung (Lastfall Temperatur) .....	245
5.4.7	Zylinder auf Torusschale .....	249
5.4.8	Kugelschale mit Fußring und Kreisringplatte .....	251
5.4.9	Kegelstumpfförmiger Behälter mit Kuppel und Bodenplatte .....	254
5.4.10	Zylindrischer Behälter mit Kugelboden und Kreisringscheibe .....	258

5.4.11	Zylindrischer Wasserbehälter mit kegelstumpfförmiger Haube und Zugring .....	259
<b>6</b>	<b>Hilfstafeln .....</b>	<b>267</b>
T. 1	Schnittkräfte und Randverformungen von Kreis- und Kreisringscheiben infolge konstanter Radiallast .....	267
T. 2	Zahlentafel zur Berechnung der Momente vierseitig gelagerter Rechteckplatten infolge Gleichlast ( $\mu = 0$ ) .....	268
T. 3	Momentenbeiwerte nach PIEPER/MARTENS für vierseitig gelagerte Rechteckplatten .....	269
T. 4	Zahlentafel zur Berechnung der Biegemomente gelenkig gelagerter Rechteckplatten infolge eines sinusförmigen Randmoments .....	272
T. 5	Schnittgrößen von Kreisplatten mit rotationssymmetrischer Belastung .....	273
T. 6	Verformungen von Kreisplatten mit rotationssymmetrischer Belastung .....	274
T. 7	Schnittgrößen von Kreisringplatten mit rotationssymmetrischer Belastung .....	275
T. 8	Verformungen von Kreisringplatten mit rotationssymmetrischer Belastung .....	276
T. 9	Zahlentafeln für Kreisplatten mit rotationssymmetrischer Vertikallast ( $\mu = 0,2$ ) .....	277
T. 10	Zahlentafeln für am Innenrand gelagerte Kreisringplatten mit rotationssymmetrischer Vertikallast ( $\mu = 0,2$ ) .....	279
T. 11	Zahlentafeln für am Innenrand gelagerte Kreisringplatten mit Randmomenten ( $\mu = 0,2$ ) .....	281
T. 12	Zahlentafeln für am Außenrand gelagerte Kreisringplatten mit Vertikalbelastung ( $\mu = 0,2$ ) .....	283
T. 13	Zahlentafeln für am Außenrand gelagerte Kreisringplatten mit Randmomenten ( $\mu = 0,2$ ) .....	284
T. 14	Schnittgrößen und Verformungen des Kreisrings mit Rechteckquerschnitt infolge rotationssymmetrischer Belastung ..	286
T. 15	Schnittgrößen und Randverformungen von Zylinderschalen im Membranzustand .....	287
T. 16	Membrankräfte in Kugelschalen infolge ausgewählter Lastfälle ..	288
T. 17	Membranverformungen von Kugelschalen konstanter Wandstärke infolge ausgewählter Lastfälle .....	289
T. 18	Membrankräfte in Kegelschalen infolge ausgewählter Lastfälle ..	290
T. 19	Membranverformungen von Kegelschalen konstanter Wandstärke infolge ausgewählter Lastfälle .....	291
T. 20	Tafel der Funktionen $\eta$ , $\eta'$ , $\eta''$ und $\eta'''$ .....	292

---

T. 21	Schnittgrößen und Randverformungen langer Zylinderschalen ( $\lambda l \geq 4$ ) infolge rotationssymmetrischer Randlasten R und M.....	293
T. 22	Tafel der Funktionen $F_1$ bis $F_4$ für kurze Zylinder.....	294
T. 23	Hilfswerte zur Berechnung der Randverformungen und Integrationskonstanten kurzer Zylinderschalen ( $\lambda l \leq 4$ ).....	295
T. 24	Randverformungen kurzer Zylinderschalen ( $\lambda l \leq 4$ ) infolge rotationssymmetrischer Randlasten R und M.....	296
T. 25	Schnittgrößen und Randverformungen von Kugel- und Kugelzonenschalen infolge rotationssymmetrischer Randlasten R und M.....	297
T. 26	Schnittgrößen und Randverformungen von Kegel- und Kegelzonenschalen infolge rotationssymmetrischer Randlasten R und M.....	299
<b>7</b>	<b>Programm Flächentragwerke (CD-ROM) .....</b>	<b>301</b>
7.1	Allgemeines.....	301
7.2	Anwendungsbereich .....	302
7.2.1	Rechteckplatten.....	302
7.2.2	Kreisplatten.....	303
7.2.3	Rotationsschalen .....	304
7.3	Anwendung .....	305
7.3.1	Rechteckplatten.....	305
7.3.2	Kreis- und Kreisringplatten.....	305
7.3.3	Rotationsschalen .....	306
<b>Literatur.....</b>	<b>307</b>	
<b>Sachverzeichnis.....</b>	<b>311</b>	