

Kristina Reiss Gerald Schmieder

Basiswissen Zahlentheorie

Eine Einführung
in Zahlen und Zahlbereiche

Mit 43 Abbildungen



Springer

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen und Voraussetzungen	
1.1	Mengen.....	4
1.1.1	Mengen und ihre Elemente.....	4
1.1.2	Mengen und ihre Mächtigkeit.....	6
1.1.3	Gleichheit von Mengen und Teilmengen.....	7
1.1.4	Verknüpfungen von Mengen	9
1.2	Grundbegriffe des logischen Schließens	11
1.2.1	Implikationen und die Äquivalenz von Aussagen	12
1.2.2	Mathematische Logik und Alltagslogik.....	13
1.2.3	Einige (wenige) Regeln des mathematischen Beweisens und logischen Schließens.....	13
1.2.4	Implikationen und Beweisverfahren	14
1.2.5	Quantoren	17
1.3	Übungsaufgaben.....	19
2	Natürliche Zahlen	
2.1	Rechnen mit natürlichen Zahlen	23
2.1.1	Addition und Subtraktion.....	23
2.1.2	Das Prinzip des kleinsten Elements.....	24
2.1.3	Multiplikation und Teilbarkeit.....	27
2.1.4	Die Goldbach'sche Vermutung.....	30
2.2	Die Idee der unendlichen Mengen.....	32
2.2.1	Gibt es unendliche Mengen?	32
2.2.2	Hilberts Hotel	32
2.3	Beweise durch vollständige Induktion	34
2.3.1	Häufige Fehler	36
2.3.2	Produkt und Induktion	37
2.3.3	Definition durch Induktion	39
2.4	Der binomische Lehrsatz.....	46
2.5	Evidenz und Wahrheit.....	52
2.6	Was sind die natürlichen Zahlen?	55
2.7	Axiome für die natürlichen Zahlen.....	57
2.7.1	Die Peano-Axiome	57
2.7.2	Modelle zu den Peano-Axiomen.....	60
2.7.3	Mengentheoretische Begründung von \mathbb{N}	62
2.8	Übungsaufgaben.....	62

3	Zahldarstellungen und Stellenwertsysteme	
3.1	Beispiele für Zahldarstellungen	67
3.2	Division mit Rest	71
3.3	Die Kreuzprobe	75
3.3.1	Das Prinzip der Kreuzprobe	75
3.3.2	Die Begründung der Kreuzprobe	76
3.4	Zahldarstellung in g -adischen Systemen	78
3.5	Rechnen in Stellenwertsystemen	82
3.5.1	Addition und Subtraktion in g -adischen Systemen	83
3.5.2	Multiplikation und Division in g -adischen Systemen	85
3.6	Übungsaufgaben	88
4	Teilbarkeit und Primzahlen	
4.1	Teilbarkeit in \mathbb{N}	91
4.2	Primzahlen	95
4.2.1	Das Sieb des Eratosthenes	96
4.2.2	Die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen	97
4.2.3	Primzahlzwillinge, Primzahltuple, Primzahlformeln	99
4.2.4	Primfaktorzerlegung	101
4.3	Teilbarkeit und Primfaktoren in \mathbb{Z}	106
4.4	Übungsaufgaben	114
5	Teiler und Vielfache	
5.1	Der größte gemeinsame Teiler in \mathbb{Z}	119
5.2	Der euklidische Algorithmus	125
5.3	Das kleinste gemeinsame Vielfache in \mathbb{Z}	130
5.4	Vollkommene Zahlen	133
5.5	Übungsaufgaben	140
6	Ganze Zahlen	
6.1	Definition der ganzen Zahlen	147
6.2	Rechnen mit ganzen Zahlen	154
6.3	Die isomorphe Einbettung der natürlichen in die ganzen Zahlen	159
6.4	Die Anordnung der ganzen Zahlen	165
6.5	Übungsaufgaben	166
7	Restklassen	
7.1	Kongruenzen	171
7.2	Verknüpfungen von Restklassen	177
7.2.1	Der Ring \mathbb{Z}_m der Restklassen modulo m	186
7.3	Teilbarkeitsregeln	188

7.3.1	Quersummenregeln.....	188
7.3.2	Endstellenregeln	191
7.4	Pseudozufallszahlen und Kongruenzen	192
7.4.1	Die Erzeugung von Pseudozufallszahlen	194
7.5	Übungsaufgaben	195
8	Lineare und quadratische Kongruenzen	
8.1	Lineare Kongruenzen und ihre Lösbarkeit	199
8.2	Anwendungen linearer Kongruenzen	204
8.3	Sätze von Euler	207
8.4	Chinesischer Restsatz.....	212
8.5	Quadratische Kongruenzen	214
8.6	Übungsaufgaben	224
9	Teilbarkeit in Integritätsringen	
9.1	Integritätsringe.....	228
9.2	Einheiten, Teiler und assozierte Elemente	233
9.3	Primelemente	242
9.4	Nebenklassen, Ideale und Hauptidealringe	250
9.5	Eigenschaften von Hauptidealringen.....	257
9.6	Übungsaufgaben	263
10	Rationale Zahlen	
10.1	Definition der rationalen Zahlen.....	267
10.2	\mathbb{Q} ist eine große Menge: Dezimaldarstellung.....	277
10.3	\mathbb{Q} ist eine kleine Menge: Abzählbarkeit	286
10.3.1	Abzählen nach der Summe von Zähler und Nenner	287
10.3.2	Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen.....	289
10.4	\mathbb{Q} ist eine kleine Menge: Rationale und reelle Zahlen	290
10.5	Kettenbrüche	296
10.5.1	Darstellung von rationalen Zahlen durch Kettenbrüche.....	299
10.5.2	Darstellung von irrationalen Zahlen durch Kettenbrüche.....	301
10.6	Übungsaufgaben	302
11	Reelle Zahlen	
11.1	Konvergenz	309
11.2	Die Erweiterung von \mathbb{Q} auf \mathbb{R}	320
11.3	Nachweis des Grenzwerts	327
11.4	Übungsaufgaben	333

12	Komplexe Zahlen	
12.1	Definition der komplexen Zahlen	338
12.1.1	Die Zahlenebene	338
12.1.2	Polarkoordinaten	339
12.2	Addition und Multiplikation	343
12.3	Reelle Zahlen sind komplexe Zahlen	346
12.4	Rechnen mit komplexen Zahlen	348
12.5	Quadratische Gleichungen	353
12.6	Gleichungen höherer Ordnung	358
12.7	Übungsaufgaben	363
13	Zahlentheoretische Funktionen	
13.1	Begriffsbestimmung	367
13.2	Primzahlverteilung	368
13.3	Die Euler'sche φ -Funktion	370
13.4	Die Riemann'sche ζ -Funktion	377
13.4.1	Ungerade natürliche Zahlen und die Riemann'sche ζ -Funktion	379
13.4.2	Zusammenhänge der Riemann'schen ζ -Funktion mit den Primzahlen	379
13.5	Übungsaufgaben	382
14	Anwendungen der elementaren Zahlentheorie	
14.1	Verwaltung von Lagerbeständen	387
14.1.1	EAN (European Article Number)	387
14.1.2	ISBN (International Standard Book Number)	390
14.2	Kryptographie	393
14.2.1	Einheiten in \mathbb{Z}_{pq}	398
14.2.2	Grundlagen des RSA-Verfahrens	399
14.2.3	Praktische Zahlenkodierung	400
14.2.4	Ein Beispiel zur Kodierung und Dekodierung	402
14.2.5	Praktische Textkodierung	403
14.3	Übungsaufgaben	407
	Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben	411
	Lösungen zu den Übungsaufgaben	425
	Literaturverzeichnis	461
	Index	463