

Kristina Reiss    Gerald Schmieder

---

# Basiswissen Zahlentheorie

Eine Einführung  
in Zahlen und Zahlbereiche

Mit 43 Abbildungen

 Springer

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen und Voraussetzungen</b>	
1.1	Mengen.....	4
1.1.1	Mengen und ihre Elemente.....	4
1.1.2	Mengen und ihre Mächtigkeit.....	6
1.1.3	Gleichheit von Mengen und Teilmengen .....	7
1.1.4	Verknüpfungen von Mengen .....	9
1.2	Grundbegriffe des logischen Schließens .....	11
1.2.1	Implikationen und die Äquivalenz von Aussagen .....	12
1.2.2	Mathematische Logik und Alltagslogik.....	13
1.2.3	Einige (wenige) Regeln des mathematischen Beweisens und logischen Schließens.....	13
1.2.4	Implikationen und Beweisverfahren .....	14
1.2.5	Quantoren .....	17
1.3	Übungsaufgaben .....	19
<b>2</b>	<b>Natürliche Zahlen</b>	
2.1	Rechnen mit natürlichen Zahlen .....	23
2.1.1	Addition und Subtraktion.....	23
2.1.2	Das Prinzip des kleinsten Elements.....	24
2.1.3	Multiplikation und Teilbarkeit.....	27
2.1.4	Die Goldbach'sche Vermutung.....	30
2.2	Die Idee der unendlichen Mengen.....	32
2.2.1	Gibt es unendliche Mengen? .....	32
2.2.2	Hilberts Hotel .....	32
2.3	Beweise durch vollständige Induktion .....	34
2.3.1	Häufige Fehler .....	36
2.3.2	Produkt und Induktion .....	37
2.3.3	Definition durch Induktion .....	39
2.4	Der binomische Lehrsatz.....	46
2.5	Evidenz und Wahrheit.....	52
2.6	Was sind die natürlichen Zahlen? .....	55
2.7	Axiome für die natürlichen Zahlen .....	57
2.7.1	Die Peano-Axiome .....	57
2.7.2	Modelle zu den Peano-Axiomen .....	60
2.7.3	Mengentheoretische Begründung von $\mathbb{N}$ .....	62
2.8	Übungsaufgaben .....	62

<b>3</b>	<b>Zahldarstellungen und Stellenwertsysteme</b>	
3.1	Beispiele für Zahldarstellungen .....	67
3.2	Division mit Rest .....	71
3.3	Die Kreuzprobe .....	75
3.3.1	Das Prinzip der Kreuzprobe .....	75
3.3.2	Die Begründung der Kreuzprobe .....	76
3.4	Zahldarstellung in g-adischen Systemen .....	78
3.5	Rechnen in Stellenwertsystemen .....	82
3.5.1	Addition und Subtraktion in g-adischen Systemen .....	83
3.5.2	Multiplikation und Division in g-adischen Systemen ....	85
3.6	Übungsaufgaben .....	88
<b>4</b>	<b>Teilbarkeit und Primzahlen</b>	
4.1	Teilbarkeit in $\mathbb{N}$ .....	91
4.2	Primzahlen .....	95
4.2.1	Das Sieb des Eratosthenes .....	96
4.2.2	Die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen .....	97
4.2.3	Primzahlzwillinge, Primzahltripel, Primzahlformeln ....	99
4.2.4	Primfaktorzerlegung .....	101
4.3	Teilbarkeit und Primfaktoren in $\mathbb{Z}$ .....	106
4.4	Übungsaufgaben .....	114
<b>5</b>	<b>Teiler und Vielfache</b>	
5.1	Der größte gemeinsame Teiler in $\mathbb{Z}$ .....	119
5.2	Der euklidische Algorithmus .....	125
5.3	Das kleinste gemeinsame Vielfache in $\mathbb{Z}$ .....	130
5.4	Vollkommene Zahlen .....	133
5.5	Übungsaufgaben .....	140
<b>6</b>	<b>Ganze Zahlen</b>	
6.1	Definition der ganzen Zahlen .....	147
6.2	Rechnen mit ganzen Zahlen .....	154
6.3	Die isomorphe Einbettung der natürlichen in die ganzen Zahlen .....	159
6.4	Die Anordnung der ganzen Zahlen .....	165
6.5	Übungsaufgaben .....	166
<b>7</b>	<b>Restklassen</b>	
7.1	Kongruenzen .....	171
7.2	Verknüpfungen von Restklassen .....	177
7.2.1	Der Ring $\mathbb{Z}_m$ der Restklassen modulo $m$ .....	186
7.3	Teilbarkeitsregeln .....	188

7.3.1	Quersummenregeln.....	188
7.3.2	Endstellenregeln .....	191
7.4	Pseudozufallszahlen und Kongruenzen .....	192
7.4.1	Die Erzeugung von Pseudozufallszahlen .....	194
7.5	Übungsaufgaben .....	195
<b>8</b>	<b>Lineare und quadratische Kongruenzen</b>	
8.1	Lineare Kongruenzen und ihre Lösbarkeit .....	199
8.2	Anwendungen linearer Kongruenzen .....	204
8.3	Sätze von Euler .....	207
8.4	Chinesischer Restsatz .....	212
8.5	Quadratische Kongruenzen .....	214
8.6	Übungsaufgaben .....	224
<b>9</b>	<b>Teilbarkeit in Integritätsringen</b>	
9.1	Integritätsringe.....	228
9.2	Einheiten, Teiler und assoziierte Elemente .....	233
9.3	Primelemente .....	242
9.4	Nebenklassen, Ideale und Hauptidealringe .....	250
9.5	Eigenschaften von Hauptidealringen.....	257
9.6	Übungsaufgaben .....	263
<b>10</b>	<b>Rationale Zahlen</b>	
10.1	Definition der rationalen Zahlen.....	267
10.2	$\mathbb{Q}$ ist eine große Menge: Dezimaldarstellung.....	277
10.3	$\mathbb{Q}$ ist eine kleine Menge: Abzählbarkeit .....	286
10.3.1	Abzählen nach der Summe von Zähler und Nenner .....	287
10.3.2	Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen.....	289
10.4	$\mathbb{Q}$ ist eine kleine Menge: Rationale und reelle Zahlen .....	290
10.5	Kettenbrüche.....	296
10.5.1	Darstellung von rationalen Zahlen durch Kettenbrüche.....	299
10.5.2	Darstellung von irrationalen Zahlen durch Kettenbrüche.....	301
10.6	Übungsaufgaben .....	302
<b>11</b>	<b>Reelle Zahlen</b>	
11.1	Konvergenz .....	309
11.2	Die Erweiterung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ .....	320
11.3	Nachweis des Grenzwerts .....	327
11.4	Übungsaufgaben .....	333

<b>12</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	
12.1	Definition der komplexen Zahlen .....	338
12.1.1	Die Zahlenebene .....	338
12.1.2	Polarkoordinaten .....	339
12.2	Addition und Multiplikation .....	343
12.3	Reelle Zahlen sind komplexe Zahlen .....	346
12.4	Rechnen mit komplexen Zahlen .....	348
12.5	Quadratische Gleichungen .....	353
12.6	Gleichungen höherer Ordnung .....	358
12.7	Übungsaufgaben .....	363
<b>13</b>	<b>Zahlentheoretische Funktionen</b>	
13.1	Begriffsbestimmung .....	367
13.2	Primzahlverteilung .....	368
13.3	Die Euler'sche $\varphi$ -Funktion .....	370
13.4	Die Riemann'sche $\zeta$ -Funktion .....	377
13.4.1	Ungerade natürliche Zahlen und die Riemann'sche $\zeta$ -Funktion .....	379
13.4.2	Zusammenhänge der Riemann'schen $\zeta$ -Funktion mit den Primzahlen .....	379
13.5	Übungsaufgaben .....	382
<b>14</b>	<b>Anwendungen der elementaren Zahlentheorie</b>	
14.1	Verwaltung von Lagerbeständen .....	387
14.1.1	EAN (European Article Number) .....	387
14.1.2	ISBN (International Standard Book Number) .....	390
14.2	Kryptographie .....	393
14.2.1	Einheiten in $\mathbb{Z}_{pq}$ .....	398
14.2.2	Grundlagen des RSA-Verfahrens .....	399
14.2.3	Praktische Zahlenkodierung .....	400
14.2.4	Ein Beispiel zur Kodierung und Dekodierung .....	402
14.2.5	Praktische Textkodierung .....	403
14.3	Übungsaufgaben .....	407
	<b>Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben</b> .....	411
	<b>Lösungen zu den Übungsaufgaben</b> .....	425
	<b>Literaturverzeichnis</b> .....	461
	<b>Index</b> .....	463