

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität	11
2.1	Kondition eines Problems	11
2.1.1	Elementare Beispiele	12
2.1.2	Bemessen, Normen	15
2.1.3	Relative und Absolute Kondition	18
2.1.4	Relative Konditionszahlen skalarwertiger Probleme	19
2.1.5	Operatornormen, Konditionszahlen linearer Abbildungen	26
2.2	Rundungsfehler und Gleitpunktarithmetik	35
2.2.1	Zahldarstellungen	35
2.2.2	Rundung, Maschinengenauigkeit	37
2.2.3	Gleitpunktarithmetik und Fehlerverstärkung bei elementaren Rechenoperationen	39
2.3	Stabilität eines Algorithmus	42
2.4	Übungen	48
3	Lineare Gleichungssysteme, direkte Lösungsverfahren	51
3.1	Vorbemerkungen, Beispiele	51
3.2	Kondition und Störungssätze	58
3.2.1	Zeilenkalierung	62
3.3	Wie man es nicht machen sollte	64
3.4	Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen	65
3.5	Gauß-Elimination, LR -Zerlegung	68
3.5.1	Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung	71
3.5.2	Numerische Durchführung der LR -Zerlegung und Implementierungshinweise	76
3.5.3	Einige Anwendungen der LR -Zerlegung	79
3.6	Cholesky-Zerlegung	82
3.7	Bandmatrizen	88

3.8	Stabilitätsanalyse bei der LR - und Cholesky-Zerlegung	91
3.9	QR -Zerlegung	92
3.9.1	Givens-Rotationen	95
3.9.2	Householder-Transformationen	101
3.10	Übungen	107
4	Lineare Ausgleichsrechnung	117
4.1	Einleitung	117
4.2	Das lineare Ausgleichsproblem	120
4.3	Kondition des linearen Ausgleichsproblems	124
4.4	Numerische Lösung des linearen Ausgleichsproblems	127
4.4.1	Lösung der Normalgleichungen	127
4.4.2	Lösung über QR -Zerlegung	129
4.5	Zum statistischen Hintergrund – lineare Regression*	132
4.6	Orthogonale Projektion auf einen Teilraum*	135
4.7	Singulärwertzerlegung (SVD) und Pseudoinverse*	142
4.7.1	Berechnung von Singulärwerten	148
4.7.2	Rangbestimmung	150
4.7.3	Einige Anwendungshintergründe der SVD	152
4.8	Übungen	153
5	Nichtlineare Gleichungssysteme, iterative Lösungsverfahren	159
5.1	Vorbemerkungen	159
5.2	Kondition des Nullstellenproblems einer skalaren Gleichung	162
5.3	Fixpunktiteration	164
5.4	Konvergenzordnung und Fehlerschätzung	175
5.5	Berechnung von Nullstellen von skalaren Gleichungen	180
5.5.1	Bisektion	180
5.5.2	Das Newton-Verfahren	181
5.5.3	Newton-ähnliche Verfahren	186
5.5.4	Zusammenfassende Hinweise zu den Methoden für skalare Gleichungen	190
5.6	Das Newton-Verfahren für Systeme	190
5.6.1	Grundlagen des Newton-Verfahrens	190
5.6.2	Hinweise zur praktischen Durchführung des Newton-Verfahrens	196
5.7	Berechnung von Nullstellen von Polynomen*	203
5.8	Übungen	207
6	Nichtlineare Ausgleichsrechnung	213
6.1	Problemstellung	213
6.2	Das Gauß-Newton-Verfahren	215
6.2.1	Analyse der Gauß-Newton-Methode	216
6.2.2	Das gedämpfte Gauß-Newton-Verfahren	221
6.3	Levenberg-Marquardt-Verfahren	222

6.4	Übungen	224
7	Berechnung von Eigenwerten	227
7.1	Einleitung	227
7.2	Einige theoretische Grundlagen	230
7.3	Eigenwertabschätzungen	234
7.4	Kondition des Eigenwertproblems	235
7.5	Vektoriteration	238
7.6	Inverse Vektoriteration	243
7.7	<i>QR</i> -Verfahren	245
	7.7.1 Die Unterraumiteration	246
	7.7.2 <i>QR</i> -Algorithmus	252
	7.7.3 Praktische Durchführung des <i>QR</i> -Algorithmus	253
7.8	Übungen	261
8	Interpolation	265
8.1	Vorbemerkungen	265
8.2	Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome	267
	8.2.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lagrange-Polynom- interpolation	267
	8.2.2 Auswertung des Interpolationspolynoms an einer oder wenigen Stellen	270
	8.2.3 Darstellung des Interpolationspolynoms mittels der Potenzform	272
	8.2.4 Darstellung des Interpolationspolynoms mittels der Newtonschen Interpolationsformel	275
	8.2.5 Restglieddarstellung – Fehleranalyse	280
8.3	Hermite-Interpolation*	285
8.4	Numerische Differentiation	290
8.5	Grenzen der Polynominterpolation	292
8.6	Beispiel einer Splineinterpolation*	294
8.7	Trigonometrische Interpolation – Schnelle Fourier- Transformation*	299
	8.7.1 Fourier-Reihen	299
	8.7.2 Trigonometrische Interpolation und diskrete Fourier-Transformation	306
	8.7.3 Schnelle Fourier-Transformation (Fast Fourier Transform FFT)	313
8.8	Übungen	318
9	Splinefunktionen	323
9.1	Splineräume und Approximationsgüte	324
	9.1.1 B-Splines	326
	9.1.2 B-Splines als Basis für den Splineraum	330
	9.1.3 Rechnen mit Linearkombinationen von B-Splines	332

9.1.4	Stabilität der B-Spline-Basis	335
9.2	Splineinterpolation	336
9.3	Datenfit-Smoothing Splines	342
9.4	Übungen	346
10	Numerische Integration	347
10.1	Einleitung	347
10.2	Newton-Cotes-Formeln	351
10.3	Gauß-Quadratur	355
10.4	Extrapolation und Romberg-Quadratur	360
10.5	Zweidimensionale Integrale	365
10.5.1	Transformation von Integralen	365
10.5.2	Integration über dem Einheitsquadrat	369
10.5.3	Integration über dem Einheitsdreieck	370
10.6	Übungen	371
11	Gewöhnliche Differentialgleichungen	375
11.1	Einführung	375
11.2	Reduktion auf ein System 1. Ordnung	380
11.3	Einige theoretische Grundlagen	381
11.4	Einfache Einschrittverfahren	386
11.5	Fehlerbetrachtungen für Einschrittverfahren	393
11.5.1	Lokaler Abbruchfehler und Konsistenz	393
11.5.2	Zusammenhang zwischen Konsistenz und Konvergenz	399
11.5.3	Praktische Bedeutung der Konvergenzordnung	404
11.5.4	Extrapolation	404
11.6	Runge-Kutta-Einschrittverfahren	406
11.6.1	Explizite RK-Verfahren	410
11.6.2	Implizite RK-Verfahren*	416
11.7	Schrittweitensteuerung bei Einschrittverfahren	419
11.8	Mehrschrittverfahren	423
11.8.1	Allgemeine lineare Mehrschrittverfahren	423
11.8.2	Adams-Bashforth-Verfahren	426
11.8.3	Adams-Moulton-Verfahren	428
11.8.4	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	430
11.8.5	Konvergenz von linearen Mehrschrittverfahren*	432
11.9	Steife Systeme	436
11.9.1	Einleitung	436
11.9.2	Stabilitätsintervalle	440
11.9.3	Stabilitätsgebiete: A-Stabilität*	443
11.9.4	Rückwärtsdifferenzenmethoden	444
11.10	Zusammenfassende Bemerkungen	447
11.11	Übungen	449

12	Partielle Differentialgleichungen	455
12.1	Problemstellung und Prototypen	455
12.2	Korrekt gestellte Probleme – Kondition*	465
12.3	Differenzenverfahren für elliptische Randwertaufgaben	470
12.3.1	Diskretisierung der Poisson-Gleichung	470
12.3.2	Diskretisierung einer Konvektions-Diffusionsgleichung	474
12.3.3	Fourieranalyse	478
12.3.4	Diskretisierungsfehleranalyse – Stabilität und Konsistenz	480
12.4	Finite-Elemente-Methode für elliptische Randwertaufgaben*	490
12.4.1	Schwache Formulierung eines elliptischen Randwertproblems	491
12.4.2	Satz von Lax-Milgram und Galerkin-Diskretisierung	495
12.4.3	Korrektgestelltheit der schwachen Formulierung elliptischer Randwertprobleme	500
12.4.4	Galerkin-Diskretisierung mit Finite-Elemente-Räumen	502
12.4.5	Diskretisierungsfehleranalyse	506
12.4.6	A-posteriori Fehlerschranken und Adaptivität	511
12.4.7	Matrix-Vektor Darstellung des diskreten Problems	516
12.5	Finite-Volumen-Methode für elliptische Randwertaufgaben	523
12.5.1	Finite-Volumen Methode mit Voronoi-Kontrollvolumina	527
12.5.2	Finite-Volumen Methode mit einem dualen Gitter	530
12.6	Fazit: Vergleich der Methoden	534
12.7	Diskretisierung parabolischer Anfangs-Randwertaufgaben	536
12.8	Übungen	538
13	Große dünnbesetzte lineare Gleichungssysteme, iterative Lösungsverfahren	543
13.1	Beispiele großer dünnbesetzter Gleichungssysteme	543
13.2	Eigenschaften von Steifigkeitsmatrizen	545
13.3	Lineare Iterationsverfahren	549
13.3.1	Einleitung	549
13.3.2	Das Jacobi-Verfahren	554
13.3.3	Das Gauß-Seidel-Verfahren	558
13.3.4	SOR-Verfahren	561
13.4	Die Methode der konjugierten Gradienten	566
13.5	Vorkonditionierung	575
13.6	Zusammenfassende Bemerkungen	583
13.7	Übungen	584
14	Numerische Simulationen: Vom Pendel bis zum Airbus	589
14.1	Taktmechanismus	590
14.2	Datenfit	593
14.3	Ein Masse-Feder System	596

XVIII Inhaltsverzeichnis

14.4	Wärmeleitung	602
14.5	Komplexere Beispiele numerischer Simulationen	607
14.5.1	Inverses Wärmeleitproblem in einem welligen Rieselfilm	608
14.5.2	Inkompressible Strömung in einer Blutpumpe	615
14.5.3	Kompressible Strömung um einen Flugzeugflügel	620
14.6	Übungen	624
Literaturverzeichnis		627
Sachverzeichnis		629