

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Lineare Gleichungssysteme	1
1.1 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	2
1.1.1 Lösungsmengen linearer Gleichungen mit zwei Variablen	2
1.1.2 Lösungsmengen von Gleichungssystemen mit zwei Variablen	5
1.1.3 Lösungsverfahren	8
1.1.4 Sachsituationen, die auf LGS mit zwei Variablen führen	12
1.1.5 Aufgaben zu Abschnitt 1.1	13
1.2 Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	15
1.2.1 Lösungsmengen linearer Gleichungen und Gleichungssysteme mit drei Variablen	15
1.2.2 Der Gauß-Algorithmus	22
1.2.3 Aufgaben zu Abschnitt 1.2	28
1.3 Verallgemeinerungen und einige Begriffe	29
1.3.1 Der Gauß-Algorithmus in Matrixschreibweise	29
1.3.2 Ränge der einfachen und erweiterten Koeffizientenmatrix ...	32
1.3.3 Ein Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme	34
1.3.4 Homogene und inhomogene lineare Gleichungssysteme	37
1.3.5 Aufgaben zu Abschnitt 1.3	39
1.4 Einige Anwendungen linearer Gleichungssysteme	40
1.4.1 Aufgaben zu Abschnitt 1.4	43
1.5 Lösen linearer Gleichungssysteme mithilfe des Computers	44
2 Koordinatengeometrie	49
2.1 Geraden in der Ebene	50
2.1.1 Koordinatengleichungen von Geraden	50
2.1.2 Winkel zwischen Geraden in der Ebene	53
2.1.3 Aufgaben zu Abschnitt 2.1	54
2.2 Abstände von Punkten; Kreisgleichungen	55
2.2.1 Abstände von Punkten in der Ebene und im Raum	55
2.2.2 Kreise	58
2.2.3 Lagebeziehungen von Kreisen und Geraden	61
2.2.4 Aufgaben zu Abschnitt 2.2	65
2.3 Kugeln und Kegel	67
2.3.1 Kugelgleichungen	67
2.3.2 Kegel	69
2.3.3 Aufgaben zu Abschnitt 2.3	71
2.4 Kurven zweiter Ordnung: Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln	72
2.4.1 Ortsdefinitionen von Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln	72
2.4.2 Gleichungen von Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln	76
2.4.3 Tangenten an Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln	81

2.4.4	Aufgaben zu Abschnitt 2.4	82
3	Vektoren	85
3.1	Vektoren in physikalischen und geometrischen Kontexten	86
3.1.1	Kräfte, Geschwindigkeiten und Verschiebungen	86
3.1.2	Pfeilklassen	89
3.1.3	Addition und skalare Multiplikation von Pfeilklassen	91
3.1.4	Aufgaben zu Abschnitt 3.1	99
3.2	Vektoren in arithmetischen Kontexten	100
3.2.1	Stücklisten, Farben	100
3.2.2	n -Tupel	103
3.2.3	Aufgaben zu Abschnitt 3.2	105
3.3	Zusammenhänge zwischen Pfeilklassen und n -Tupeln – Vektoren	106
3.3.1	Pfeilklassen im Koordinatensystem	106
3.3.2	Die Isomorphie zwischen der Menge der Pfeilklassen der Ebene bzw. des Raumes und \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3	109
3.3.3	Vektoren	110
3.3.4	Aufgaben zu Abschnitt 3.3	112
3.4	Linearkombinationen von Vektoren	113
3.4.1	Linearkombinationen	113
3.4.2	Kollineare und komplanare Vektoren	116
3.4.3	Anwendungen von Linearkombinationen in der Geometrie	118
3.4.4	Aufgaben zu Abschnitt 3.4	121
3.5	Das Skalarprodukt zweier Vektoren	122
3.5.1	Arithmetische Einführung des Skalarprodukts	122
3.5.2	Geometrische Deutung des Skalarprodukts	124
3.5.3	Anwendungen des Skalarprodukts in Geometrie und Physik	130
3.5.4	Aufgaben zu Abschnitt 3.5	131
3.6	Vektor- und Spatprodukt	133
3.6.1	Das Vektorprodukt	133
3.6.2	Das Spatprodukt – Berechnung von Volumina	136
3.6.3	Aufgaben zu Abschnitt 3.6	137
3.7	Vektorrechnung und -darstellung mithilfe des Computers	137
4	Vektorielle Raumgeometrie	139
4.1	Parameterdarstellungen von Geraden und Kurven	140
4.1.1	Beschreibung von Geraden durch Parametergleichungen	140
4.1.2	Parameter- und Koordinatengleichungen bzw. LGS	142
4.1.3	Lagebeziehungen und Schnittpunkte von Geraden	144
4.1.4	Parameterdarstellungen als Funktionen, Beschreibung von Bewegungen	146
4.1.5	Exkurs: Parameterdarstellungen einiger Kurven	147
4.1.6	Aufgaben zu Abschnitt 4.1	149
4.2	Ebenen	151

4.2.1	Parameter- und Koordinatengleichungen von Ebenen.....	151
4.2.2	Lagebeziehungen und Schnittpunkte von Geraden und Ebenen sowie von Ebenen und Ebenen	152
4.2.3	Aufgaben zu Abschnitt 4.2	155
4.3	Metrische Geometrie von Geraden und Ebenen.....	156
4.3.1	Normalengleichungen von Geraden und Ebenen	156
4.3.2	Schnittwinkel zwischen Geraden und Ebenen	159
4.3.3	Die Hessesche Normalform von Geraden- und Ebenengleichungen; Abstandsberechnungen.....	161
4.3.4	Aufgaben zu Abschnitt 4.3	165
5	Vektorräume	167
5.1	Der Begriff des Vektorraumes, Beispiele	168
5.1.1	Definition des Begriffs Vektorraum	168
5.1.2	Beispiele für Vektorräume	169
5.1.3	Aufgaben zu Abschnitt 5.1	171
5.2	Untervektorräume	172
5.2.1	Definition, Unterraumkriterium und Beispiele	172
5.2.2	Der Durchschnitt und die Summe zweier Unterräume	176
5.2.3	Aufgaben zu Abschnitt 5.2	177
5.3	Lineare Hüllen, Erzeugendensysteme, lineare Abhängigkeit	178
5.3.1	Lineare Hüllen von Vektormengen	178
5.3.2	Erzeugendensysteme	179
5.3.3	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	182
5.3.4	Aufgaben zu Abschnitt 5.3	186
5.4	Basis und Dimension	187
5.4.1	Der Begriff der Basis	187
5.4.2	Koordinaten von Vektoren bezüglich Basen	188
5.4.3	Weitere Beispiele für Basen	189
5.4.4	Sätze über Basen von Vektorräumen	191
5.4.5	Der Begriff der Dimension	197
5.4.6	Die Dimensionsformel für lineare Unterräume	199
5.4.7	Aufgaben zu Abschnitt 5.4	201
5.5	Affine Punkträume	203
5.5.1	Der Begriff des affinen Raumes	203
5.5.2	Koordinatensysteme	205
5.5.3	Affine Unterräume und ihre Lagebeziehungen	210
5.5.4	Anwendung auf die Theorie der linearen Gleichungssysteme ..	214
5.5.5	Aufgaben zu Abschnitt 5.5	218
5.6	Euklidische Vektor- und Punkträume	219
5.6.1	Positiv definite symmetrische Bilinearformen	219
5.6.2	Beträge von Vektoren, Orthogonalität und Winkel	222
5.6.3	Orthonormalbasen und kartesische Koordinatensysteme	224

5.6.4	Aufgaben zu Abschnitt 5.6	226
6	Matrizen	227
6.1	Begriffsbestimmung, Ränge von Matrizen	228
6.1.1	Zeilen- und Spaltenvektoren, transponierte Matrizen	228
6.1.2	Zeilenrang und Spaltenrang einer Matrix	229
6.1.3	Aufgaben zu Abschnitt 6.1	234
6.2	Matrizenmultiplikation und -inversion	235
6.2.1	Einführungsbeispiel: Materialverflechtung	235
6.2.2	Matrizenmultiplikation – Definition und Rechenregeln	238
6.2.3	Anwendungsbeispiele zur Matrizenmultiplikation	241
6.2.4	Inverse Matrizen	245
6.2.5	Aufgaben zu Abschnitt 6.2	249
6.3	Ein Ausblick auf Determinanten	251
6.3.1	Aufgaben zu Abschnitt 6.3	255
6.4	Matrizenrechnung mithilfe des Computers	256
7	Lineare und affine Abbildungen	257
7.1	Abbildungen: Definition und einige Beispiele	258
7.1.1	Der Begriff „Abbildung“, Eigenschaften von Abbildungen ...	258
7.1.2	Koordinatenbeschreibungen geometrischer Abbildungen ...	259
7.1.3	Aufgaben zu Abschnitt 7.1	263
7.2	Lineare Abbildungen	264
7.2.1	Definition und einige Beispiele	264
7.2.2	Einige Eigenschaften linearer Abbildungen	267
7.2.3	Matrizielle Darstellung linearer Abbildungen	270
7.2.4	Nacheinanderausführung linearer Abbildungen	273
7.2.5	Isomorphismen	274
7.2.6	Aufgaben zu Abschnitt 7.2	277
7.3	Affine Abbildungen	279
7.3.1	Definition und Beispiele	279
7.3.2	Einige Eigenschaften affiner Abbildungen	284
7.3.3	Aufgaben zu Abschnitt 7.3	286
7.4	Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen	287
7.4.1	Isometrien	287
7.4.2	Kongruenzabbildungen	292
7.4.3	Ähnlichkeitsabbildungen	294
7.4.4	Aufgaben zu Abschnitt 7.4	296
	Literaturverzeichnis	297
	Index	298